Zusammenfassung zu Analysis II

Sara Adams

9. August 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Analysis II
gehalten im Sommersemester 2003
von Prof. Dr. Thomas Bartsch
an der Justus-Liebig Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1 Topologie des $\mathbb{R}^n$ **3**

2 Stetige Funktionen **5**

3 Differenzierbare Abbildungen - Begriffe **6**

4 Differenzierbare Abbildungen - Einfache Sätze **7**

5 Höhere Ableitungen und Taylor'sche Formel **8**

6 Lokale Extrema **9**
6.1 Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen . . . 9
6.2 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . 10

7 Satz von der lokalen Umkehrfunktion **10**

8 Satz über die implizite Funktion **10**
8.1 Satz über die implizite Funktion . . . 10
8.2 Extrema unter Nebenbedingungen . . . 11
8.3 Untermannigfaltigkeiten . . . 11

9 Integration stetiger Funktionen mit kompaktem Träger **12**

10 Integrierbare Funktionen **13**

11 Berechnung von Integralen und Volumina **15**

12 Kurvenintegrale **16**

1 Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definitionen

- $\mathbb{R}^n := \{(x_1, ..., x_n)^T : x_i \in \mathbb{R}\}$ (ist $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Verknüpfungen:)
  - $(x_1, ..., x_n)^T + (y_1, ..., y_n)^T := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)^T$ Addition
  - $\lambda \cdot (x_1, ..., x_n)^T := (\lambda \cdot x_1, ..., \lambda \cdot x_n)^T, \ \lambda \in \mathbb{R}$ Skalarmultiplikation
- **Norm** auf dem Vektorraum $V: \ ||.|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ mit:
  1. $x \in V, \ ||x|| = 0 \Rightarrow \ x = 0$
  2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
  3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in V$ (Dreiecksungleichung)
- **normierter Vektorraum**: Vektorraum mit dazugehöriger Norm $(V, ||.||)$
- $p \in [1, \infty) : p$-**Norm** in $\mathbb{R}^n : \ ||.||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
  - $p = 1$: Einsnorm
  - $p = 2$: euklidische Norm
- **Supremumsnorm** in $\mathbb{R}^n : \ ||.||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \max\{|x_k| : \ k = 1, ..., n\}$
- **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V : <,>: V \times V \to \mathbb{R}$:
  1. $< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y > \quad \forall x_1, x_2, y \in V$ (Additivität)
  2. $< \lambda x, y > = \lambda \cdot < x, y > \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V$ (Homogenität)
  3. $< x, y > = < y, x > \quad \forall x, y \in V$ (Symmetrie)
  4. $0 \neq x \in V \Rightarrow < x, x > > 0$ (positiv definit)
- $x, y \in \mathbb{R}^n : \ x$ **orthogonal zu** $y \Leftrightarrow \ x \perp y \ :\Leftrightarrow < x, y > = 0$
- **orthogonale Projektion** auf $\mathbb{R}x, x \in \mathbb{R}^n : \ P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}x, y \mapsto \frac{|<x,y>|}{||x||_2} \cdot x$
- **Metrik** auf $X : \ d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ (Abstand von zwei Elementen):
  1. $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
  2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
  3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)
- **metrischer Raum**: Menge mit dazugehöriger Metrik (X, d)
- $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^n, (x, y) \mapsto ||x - y||_p$ Metrik auf $\mathbb{R}^n$
  - $p = 2$: **euklidischer Abstand**
- (X, d) metrischer Raum, $(x_k)_k$ Folge in $X, \ x \in X$:
  - $(x_k)_k$ **konvergiert** gegen $x \Leftrightarrow \ x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x :\Leftrightarrow \ d(x_k, x) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  - x **Limes/Grenzwert** von $(x_k)_k \Leftrightarrow \ x = \lim_{k\to\infty} x_k :\Leftrightarrow \ x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$
  - x **Häufungspunkt** von $(x_k)_k :\Leftrightarrow \ \exists (x_{k_l})_l \subset (x_k)_k : \ x_{k_l} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} x$
  - $(x_k)_k$ **Cauchyfolge** $:\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$
  - $Y \subset X$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow \ \sup\{d(x, y) : \ x, y \in Y\} < \infty$
  - $(x_k)_k$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow \ \{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt
  - $r > 0 : \ U_r(x) := \{y \in X : \ d(x, y) < r\}$ **offene r-Umgebung** um x
  - $r > 0 : \ B_r(x) := \{y \in X : \ d(x, y) \leq r\}$ **abgeschlossene r-Umgebung** um x
  - $Y, Z \subset X, \ Y \neq \emptyset \neq Z : \ d(Y, Z) := \inf\{d(y, z) : \ y \in Y, z \in Z\}$ **Abstand** zwischen Y und Z
  - $Y \subset X : \ \overline{Y} = \text{clos}(Y) := \{x \in X : \ x$ Grenzwert einer Folge in $Y\}$ **Abschluß** von Y in X
  - $\overset{\circ}{Y} = \text{int}(Y) := \{y \in Y : \ \exists r > 0 : \ U_r(y) \subset Y\}$ **Inneres** von Y
- Obige Begriffe gelten auch für normierte Vektorräume mit $d(x, y) := ||x - y||$
- $||.||, |||.||| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ **äqivalent** $:\Leftrightarrow \ \exists a, b > 0 : \ a||x|| \leq |||x||| \leq b||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$
  - A **abgeschlossen** (bzgl. d) $:\Leftrightarrow \ [(x_k)_k \subset A, x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow \ x \in A]$
  - A **offen** $:\Leftrightarrow \ X \backslash A$ abgeschlossen
  - A **kompakt** $:\Leftrightarrow \ A$ abgeschlossen und beschränkt
  - $(U_i)_{i\in I}$ **offene Überdeckung** von $A :\Leftrightarrow \ U_i$ offen $\forall i \in I, \ A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$
  - $(U_i)_{i\in I}$ **endliche offene Überdeckung** von $A :\Leftrightarrow \ (U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $A, \ |I| < \infty$
  - $(U_i)_{i\in J}$ **Teilüberdeckung** von $\bigcup_{i\in I} U_i :\Leftrightarrow \ J \subset I, \ A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

Sätze

- Für $p \in [1, \infty]$ ist $||.||_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$
- $p \in [1, \infty], q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & 1 < p < \infty \\ 1 & p = \infty \\ \infty & p = 1 \end{cases}, \ x, y \in \mathbb{R}^n :$
  $| < x, y > | \leq ||x||_p \cdot ||y||_q$ **Hölder-Ungleichung**
  - $p = q = 2 : \ | < x, y > | \leq ||x||_2 \cdot ||y||_2$ **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**
- $< x, y > = ||x||_2 \cdot ||y||_2 \cdot \cos(\varphi), \ \varphi \in [0, \pi]$ eingeschlossener Winkel zwischen x und y
- $(x_k)_k$ in $(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ beschränkt $\Rightarrow \ (x_k)_k$ besitzt Häufungspunkt
- $(x_k)_k$ in $(\mathbb{R}^n, ||.||_2) : \quad (x_k)_k$ konvergent $\Leftrightarrow \ (x_{k,j})_k$ konvergent $\forall j \in \{1, .., n\}$
- $(x_k)_k$ in $(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ konvergent $\Leftrightarrow \ (x_k)_k$ Cauchyfolge

- $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Norm auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow\ \exists a, b > 0 :\ b||x||_\infty \leq ||x|| \leq a||x||_\infty$
- Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.
- $||.||, |||.||| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Normen $\Rightarrow\ ||.||, |||.|||$ äquivalent
- (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$: $\quad A$ offen in $X \Leftrightarrow\ \forall x \in A\ \exists r > 0 :\ U_r(x) \subset A$
- $A \subset \mathbb{R}^n$
  A kompakt
  $\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von A hat eine endliche Teilüberdeckung
  $\Leftrightarrow$ Jede Folge in A hat einen Häufungspunkt in A

2 Stetige Funktionen

Definitionen

- $(X, d), (X', d')$ metrische Räume:
  - $f : X \to X'$ **stetig** in $a \in X :\Leftrightarrow\ [(x_k)_k \subset X, x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(a)]$
  - $f : X \to X'$ **stetig** $:\Leftrightarrow\ f$ stetig in $a\ \forall a \in X$
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m :; L \text{ linear}\}$
- $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear: $||L||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} := \sup\{||Lx||_{\mathbb{R}^m} :\ x \in \mathbb{R}^n, ||x||_{\mathbb{R}^n} \leq 1\}$
- $f : X \to X' :\ f^{-1}(A) := \{x \in X :\ f(x) \in A\}$ **Urbildmenge** von $A \subset X'$

Sätze

- $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}^m, f_j : D \to \mathbb{R}, f(x) = \big(f_1(x), .., f_n(x)\big)^T :\quad f$ stetig $\Leftrightarrow\ f_j$ stetig $\forall j = 1, .., m$
- (X, d) metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$:
  - f, g stetig in $a \in X \Rightarrow\ f \pm g, f \cdot g$ stetig in a
  - f, g stetig in $a \in X, g(a) \neq 0 \Rightarrow\ \frac{f}{g} : \{x \in X :\ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in a
- $(X, d), (X', d'), (X'', d'')$ metrische Räume, $f : X \to X', g : X' \to X''$:
  f stetig in $a \in X, g$ stetig in $f(a) \Rightarrow\ f \circ g$ stetig in a
- $(X, d), (X', d')$ metrische Räume, $f : X \to X', a \in X$:
  f stetig in $a \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \big[d(x, a) < \delta \Rightarrow\ d'\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon\big]$
- $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Rightarrow\ L$ stetig
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Vektorraum mit Dimension $n \cdot m$
- $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Rightarrow\ ||L||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} < \infty,\ ||Lx||_{\mathbb{R}^m} \leq ||L||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$
- $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow\ f(K) \subset \mathbb{R}^m$ kompakt

- $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow\ \exists x_{\max}, x_{\min} \in K :\ f(x_{\max}) = \sup\{f(x) :\ x \in K\}, f(x_{\min}) = \inf\{f(x) :\ x \in K\}$
- $(X, d), (X', d')$ metrische Räume:
  f stetig
  $\Leftrightarrow$ $[A \subset X'$ offen $\Rightarrow\ f^{-1}(A)$ offen$]$
  $\Leftrightarrow$ $[A \subset X'$ abgeschlossen $\Rightarrow\ f^{-1}(A)$ abgeschlossen$]$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in \mathbb{R}^n$:
  - $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) < a\}$ offen
  - $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \leq a\}$ abgeschlossen
  - $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = a\}$ abgeschlossen

3 Differenzierbare Abbildungen - Begriffe

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ stets offen.

Definitionen

- $f : D \to \mathbb{R}^m, a \in D$:
  - f **differenzierbar** in $a :\Leftrightarrow\quad \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) :\quad f(a + h) = f(a) + L(h) + R(h), \frac{||R(h)||_{\mathbb{R}^m}}{||h||_{\mathbb{R}^n}} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
  - f **differenzierbar** $:\Leftrightarrow\ f$ differenzierbar in $a\ \forall a \in D$
  - $Df(a) = f'(a) := L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **Ableitung/Differential** von f in a
  - f **stetig differentierbar** $:\Leftrightarrow\ f$ diff.bar, $Df : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ stetig
  - f **bei a in Richtung** $v \in \mathbb{R}^n$ **ableitbar** $:\Leftrightarrow\ \exists\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a + hv) - f(a)\big)$
  - $D_v f(a) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a + hv) - f(a)\big)$ **Richtungsableitung** von f bei a in Richtung v
  - $D_v f(a) = d_i f(a) = \frac{df}{dx_i}(a)$ **i-te partielle Ableitung** von f in $a :\Leftrightarrow\ v = e_i$
  - $Df(x)$ hat Matrixdarstellung **Jacobi-Matrix** $J_f(x) = \begin{pmatrix} d_1 f_1(x) & \dots & d_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 f_m(x) & \dots & d_n f_m \end{pmatrix}$
- $\nabla f(a)$ **Gradient** von $f : D \to \mathbb{R}$ in $a :\Leftrightarrow\ Df(a)w =< \nabla f(a), w > \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$

Sätze

- $f : D \to \mathbb{R}^m$ diff.bar in $D \Rightarrow\ f$ stetig in D
- $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff.bar $\Leftrightarrow\ f_i : D \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar $\forall i = 1, .., m$
- $f : D \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in D, Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow\ \exists! v \in \mathbb{R}^n :\ Df(a)w =< v, w > \forall w \in \mathbb{R}^n$

- $f : D \to \mathbb{R}^m, \exists U$ Umgebung von $a \in D :\ \exists$ stetige $d_1 f(a), .., d_n f(a) : U \to \mathbb{R}^m \Rightarrow\ f$ diff.bar in a

- $f : D \to \mathbb{R}^m$:
  f stetig diff.bar
  $\Leftrightarrow\ \forall j = 1, .., n\ \exists$ stetige $d_j f : D \to \mathbb{R}^m$
  $\Leftrightarrow\ \forall j = 1, .., n, \forall i = 1, .., m\ \exists$ stetige $d_j f_i : D \to \mathbb{R}$

4 Differenzierbare Abbildungen - Einfache Sätze

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ stets offen.

Definitionen

- D **offen wegzusammenhängend** $:\Leftrightarrow\ \forall a, b \in D\ \exists \gamma : [0, 1] \to D$ stetig diff.bar: $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$

Sätze

- $f, g : D \to \mathbb{R}^m, k : D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $a \in D$:
  - $f \pm g : D \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) \pm g(x)$ diff.bar, $D(f \pm g)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, v \mapsto Df(a)(v) \pm Dg(a)(v)$
  - $k \cdot g : D \to \mathbb{R}^m, x \mapsto k(x) \cdot g(x)$ diff.bar in $a, D(kg) : D \to \mathbb{R}^m, v \mapsto Dk(a)(v) \cdot g(a) + k(a) \cdot Dg(a)(v)$ **Produktregel**
  - $k(D) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow \frac{1}{k} : D \to \mathbb{R}\backslash\{0\} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ diff.bar in $a, D(\frac{1}{f})(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto -\frac{1}{f(a)^2} Df(a)(v)$ **Quotientenregel**

- **Kettenregel**: $D_f \subset \mathbb{R}^n, D_g \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : D_f \to \mathbb{R}^m, g : D_g \to \mathbb{R}^l,\ f$ diff.bar in $a \in D_f,\ g$ diff.bar in $f(a) \in D_g \Rightarrow\ g \circ f : D_f \to \mathbb{R}^l$ diff.bar in $a, D(g \circ f) = Dg\big(f(a)\big) \circ Df(a)$

- **Mittelwertsatz**: $f : D \to \mathbb{R}$ diff.bar, $a, b \in D, \exists \gamma : [0, 1] \to D$ stetig diff.bar: $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b \Rightarrow\ \exists \tau \in [0, 1] :\ f(b) - f(a) = Df\big(\gamma(\tau)\big)\big(\mathring{\gamma}(\tau)\big)$

- D offen wegzusammenhängend, $f : D \to \mathbb{R}$:
  f konstant $\Leftrightarrow\ Df(x) = 0, \nabla f(x) = 0\quad \forall x \in D$

- **Schrankensatz**: $f : D \to \mathbb{R}$ diff.bar, $a, b \in D, \gamma : [0, 1] \to D, t \mapsto (1 - t)a + tb \Rightarrow \big|f(b) - f(a)\big| \leq \sup_{t \in [0,1]} ||\nabla f\big(\gamma(t)\big)||_2 \cdot ||a - b||_2$

- $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff.bar, $a, b \in D,\ \gamma : [0, 1] \to D, t \mapsto (1 - t)a + tb \Rightarrow\ f(b) - f(a) = \int_0^1 Df\big(\gamma(t)\big) \cdot \mathring{\gamma}(t) \mathrm{d}t$

- **Schrankensatz in $\mathbb{R}^m$**: $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff.bar, $a, b \in D,\ \gamma : [0, 1] \to D, t \mapsto (1 - t)a + tb \Rightarrow ||f(b) - f(a)||_2 \leq \sup_{t \in [0,1]} ||Df\big(\gamma(t)\big)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} \cdot ||b - a||_2$

- $w : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow\ ||\int_0^1 w(t) \mathrm{d}t|| \leq \int_0^1 ||w(t)|| \mathrm{d}t$

5 Höhere Ableitungen und Taylor'sche Formel

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ stets offen.

Definitionen

- $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m :\ B$ bilinear$\}$

- $f : D \to \mathbb{R}^m$:
  - f **zweimal stetig diff.bar** $:\Leftrightarrow\ D_v f : D \to \mathbb{R}^m$ diff.bar $\forall v \in \mathbb{R}^n$
  - $D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (v, w) \mapsto D\big(D_v f(a)\big)(w)$
  - f **k-mal diff.bar** $:\Leftrightarrow\ f$ $(k-1)$-mal stetig diff.bar, $D \to \mathbb{R}^m, x \mapsto D^{k-1} f(x)\big((v^{(1)}, .., v^{(k}$ diff.bar
  - $D^k f(a)(v^{(1)}, .., v^{(k)}) := D\big(D^{(k-1)} f(a)(v^{(1)}, .., v^{(k-1)})\big)(v^{(k)})$
  - f **k-mal stetig diff.bar** $:\Leftrightarrow\ f$ k-mal diff.bar, $Dx : (\mathbb{R}^n)^k \mathbb{R}^m, (x, v^{(1)}, .., v^{(k)}) \mapsto D^k f(x)(v^{(1)}, .., v^{(k)})$ stetig

- $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m) := \{f : D \to \mathbb{R}^m :\ f$ k-mal stetig diff.bar$\}$

- $f : D \to \mathbb{R}^m$ **k-mal stetig partiell diff.bar** $:\Leftrightarrow\ \exists$ alle part. Ableitungen von f stetig

- $f : D \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^k :\ T^k f(a)$ **k-tes Taylorpolynom** von f in $a :\Leftrightarrow\ T^k f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(a) + Df(a)(x - a) + .. + \frac{1}{k!} D^k f(a)(x - a^{(1)}, .., x - a^{(k)})$

- $f : D \to f(D) \subset \mathbb{R}^m$ **$\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus** $:\Leftrightarrow\ f$ bijektiv, $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^k$

Sätze

- $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\big)$

- $D^2 f(a) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bilinear

- $f : D \to \mathbb{R}^m$ 2-mal diff.bar $\Rightarrow\ D^2 f(a)$ symmetrisch $\big(D^2 f(a)(v, w) = D^2 f(a)(w, v)\big)$

- $D^2 f(a)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{d^2 f}{d_i d_j}(a) v_i w_j$

- $f : D \to \mathbb{R}^m$:
  f k-mal stetig partiell diff.bar
  $\Leftrightarrow$ alle part. Ableitungen von f bzw. $f_1, .., f_m$ existieren und sind stetig
  $\Leftrightarrow\ f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m), f = (f_1, .., f_m)^T$
  $\Leftrightarrow\ f_i : D \to \mathbb{R}$ k-mal stetig diff.bar $\forall i = 1, .., m$

- $f : D \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^{k+1}, a \in D, v \in \mathbb{R}^n :\ a + tv \in D\ \forall t \in [0, 1] \Rightarrow$
  $f(a + v) = f(a) + Df(a)(v) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(v, v) + .. + \frac{1}{k!} D^k f(a)(v^{(1)}, .., v^{(k)}) + R_{k+1}(a, v)$,
  $\exists \tau \in (0, 1) :\ R_{k+1}(a, v) = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(a + \tau v)(v^{(1)}, .., v^{(k+1)})$

- $f : D \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^{k+1} \Rightarrow\ f(x) = T^k f(a)(x) + R_{k+1}(a, x - a),\ v := x - a :\ \frac{R_{k+1}(a,v)}{||v||^k} \xrightarrow{v \to 0} 0$

- $M : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, (A, B) \mapsto A \cdot B\ \in \mathcal{C}^\infty, DM(A, B)(X, Y) = AY + XB$

- $GL(n) = GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\text{inv} : GL(n) \to GL(n), A \mapsto A^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$, $D\text{inv}(A)(X) = -A^{-1}\cdot X \cdot A^{-1}$
- $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, f : U \to V$ bijektiv, $f, f^{-1} : V \to U$ diff.bar:
  - $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Isomorphismus $\forall x \in U$, $\big(Df(x)\big)^{-1} = Df^{-1}\big(f(x)\big) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
  - $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^k$

6 Lokale Extrema

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$.

6.1 Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen

Definitionen

- $a \in D$ **lokales Minimum** von $f :\Leftrightarrow \exists r > 0 : [x \in U_r(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)]$
- $a \in D$ **striktes lokales Min.** von $f :\Leftrightarrow \exists r > 0 : [x \in U_r(a)\backslash\{a\} \Rightarrow f(x) > f(a)]$
- $a \in D$ **lokales Maximum** von $f :\Leftrightarrow \exists r > 0 : [x \in U_r(a) \Rightarrow f(x) \leq f(a)]$
- $a \in D$ **striktes lokales Max.** von $f :\Leftrightarrow \exists r > 0 : [x \in U_r(a)\backslash\{a\} \Rightarrow f(x) < f(a)]$
- $a \in D$ **kritischer Punkt** von $f :\Leftrightarrow \nabla f(a) = 0$
- $Q_f(a)$ **Hesse'sche Form** von f in $a \in D :\Leftrightarrow Q_f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto D^2 f(a)(v,v)$
- $H_f(a)$ **Hesse'sche Matrix** von f in $a \in D :\Leftrightarrow H_f(a) = (d_i d_j)_{i,j=1,..,n}$
- Q_S die zu $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gehörige **quadratische Form** $:\Leftrightarrow S$ symmetrisch, $Q_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto < Sv, v >$
  - Q_S **positiv definit** $:\Leftrightarrow Q_S(v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
  - Q_S **negativ definit** $:\Leftrightarrow Q_S(v) < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
  - Q_S **positiv semidefinit** $:\Leftrightarrow Q_S(v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
  - Q_S **negativ semidefinit** $:\Leftrightarrow Q_S(v) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
  - Q_S **indefinit** $:\Leftrightarrow \exists v, w \in \mathbb{R}^n : Q(v) < 0 < Q(w)$

Sätze

- $a \in D$ lokales Extremum (Minimum oder Maximum) von $f \Rightarrow \nabla f(a) = 0$
- $Q_S(tv) = t^2 Q_S(v) \quad \forall t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$
- $a \in D$ kritischer Punkt von f:
  - $Q_f(a)$ positiv definit $\Rightarrow a$ striktes lokales Minimum
  - $Q_f(a)$ negativ definit $\Rightarrow a$ striktes lokales Maximum
  - $Q_f(a)$ indefinit $\Rightarrow a$ kein lokales Extremum
  - a lokales Minimum $\Rightarrow Q_f(a)$ positiv semidefinit
  - a lokales Maximum $\Rightarrow Q_f(a)$ negativ semidefinit

6.2 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Es seien $f, g_1, .., g_k : D \to \mathbb{R}$, $c_1, .., c_k$ gegeben. Wir suchen Extrema von $f_{|\{x\in D:\, g_i(x)=c_i,\, i=1,..,k\}}$ bzw. Extrema von f unter der Nebenbedingung $g_i = c_i \;\forall i = 1, .., k$. Im Folgenden wird der Spezialfall betrachtet, dass g_i linear ist $\forall i = 1, .., k$. Wir schreiben:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, x \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot x$$

- Nebenbedingung $g = c \in \mathbb{R}^k$ **regulär** $:\Leftrightarrow g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surjektiv
- $\overline{x}$ Extremum von $f_{|X} \Rightarrow \nabla f(\overline{x}) \perp \text{Kern} g = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \Leftrightarrow \exists \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$ **Lagrange-Multiplikatoren**: $\nabla f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\overline{x})$

7 Satz von der lokalen Umkehrfunktion

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ stets offen.

Definitionen

- f **lokal um a invertierbar** $:\Leftrightarrow \exists U \subset D$ offene Umgebung von a : $V = f(U)$ offen, $f_{|U} : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus
- (X, d) metrischer Raum:
  - (X, d) **vollständig** $:\Leftrightarrow$ jede Cauchyfolge in X ist konvergent
  - $g : X \to X$ **Kontraktion** $:\Leftrightarrow \exists \alpha \in (0,1) : d\big(g(x), g(y)\big) \leq \alpha \cdot d(x,y) \;\forall x, y \in X$

Sätze

- **Banach'scher Fixpunktsatz**: (X, d) vollständiger, metrischer Raum, $g : X \to X$ Kontraktion $\Rightarrow \exists!\, \overline{x} \in X : g(\overline{x}) = \overline{x}$, $g^k(x_0) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x} \quad \forall x_0 \in X$
- **Satz von der lokalen Umkehrfunktion**: $f : D \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1, a \in D, \det J_f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists U \subset D$ offene Umgebung von a : $V = f(U)$ offen, $f_{|U} : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus
  - $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow (f_{|U})^{-1} \in \mathcal{C}^k$

8 Satz über die implizite Funktion

8.1 Satz über die implizite Funktion

- $g : D_\lambda \to \mathbb{R}^n, \lambda \to x_\lambda$ **implizit definiert** $:\Leftrightarrow g$ eindeutig bestimmt durch eine Gleichung $f_\lambda(x_\lambda) = 0, f_\lambda : D_\lambda \to \mathbb{R}^n, D_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ offen
- **Satz über die implizite Funktion**: $D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^r, r \geq 1, f(\lambda_0, x_0) = 0, Df_{\lambda_0}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus $\Rightarrow \exists$ offene Umgebungen U_1 von λ_0 in $\mathbb{R}^k, U_2$ von x_0 in $\mathbb{R}^n, g : U_1 \to U_2, \lambda \mapsto x_\lambda \in \mathcal{C}^r$: $[f(\lambda, x) = 0, \lambda \in U_1, x \in U_2 \Leftrightarrow x = x_\lambda = g(\lambda)]$

8.2 Extrema unter Nebenbedingungen

Es seien $f, g_1, .., g_k : D \to \mathbb{R},\ c_1, .., c_k$ gegeben, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir suchen Extrema von $f_{|\{x \in D:\ g_i(x)=c_i,\ i=1,..,k\}}$ bzw. Extrema von f unter der Nebenbedingung $g_i = c_i\ \forall i = 1, .., k$. Dazu sei $M := \{x \in D :\ g(x) = c\} = g^{-1}(c)$.

- Nebenbedingungen $g = c$ **regulär** in $x_0 \in M\ :\Leftrightarrow\ Dg(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surjektiv
- Nebenbedingungen $g = c$ **regulär** $:\Leftrightarrow$ Nebenbedingungen regulär in $x\quad \forall x \in M$
- **Jacobimatrix** $J_g(x_0) = \begin{pmatrix} d_1 g_1(x_0) & \dots & d_n g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 g_k(x_0) & \dots & d_n g_k(x_0) \end{pmatrix}$

  $Dg(x_0)$ surjektiv $\Leftrightarrow\ J_g(x_0)$ besitzt eine $k \times k$ Untermatrix, die invertierbar ist
- **Lagrange Multiplikatorenregel**: $\overline{x} \in M$ Extremum von $f_{|M}$, Nb. regulär in $\overline{x} \Rightarrow \exists \lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R} :\ \nabla f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) \Leftrightarrow\ \nabla f(\overline{x}) \perp \mathrm{Kern} Dg(\overline{x})$
  - λ_i **Lagrange-Multiplikatoren**
  - $x \in M :\ \nabla f(x) \perp \mathrm{Kern} Dg(x)$ **kritischer Punkt** von $f_{|M}$
  - x kritischer Punkt $\Rightarrow\ f(x)$ **kritischer Wert**

8.3 Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{R}^n$ stets offen.

Definitionen

- $r \geq 0 :\ M \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$**−Untermanigfaltigkeit der Dimension** $m \in \{0, .., n\}\ :\Leftrightarrow\ \forall p \in M\ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung um $p :\ U \cap M$ Graph einer $\mathcal{C}^r$−Funktion, d.h. es gibt
  $$\begin{aligned} J &= \{j_1, .., j_m\} \subset \{1, .., n\} \\ \overline{J} &= \{1, .., n\} \backslash J = \{i_1, .., i_{n-m}\} \\ x_j &= (x_{j_1}, .., x_{j_m})^T \\ x_{\overline{j}} &= (x_{i_1}, .., x_{i_{n-m}})^T \end{aligned}$$
  $h : V \to \mathbb{R}^{n-m},\ V \subset \mathbb{R}^m$ offen: $U \cap M = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_j \in V, x_{\overline{j}} = h(x_j)\}$
- c **regulärer Wert** von $g : D \to \mathbb{R}^k\ :\Leftrightarrow\ [g(x) = c \Rightarrow\ Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surjektiv]
- $T_p M := \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_{\overline{j}} = Dh(p_j) x_{\overline{j}}\}$ **Tangentialraum** von M in $p :\Leftrightarrow\ p \in M, M \subset \mathbb{R}^n$ m-dim. $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit, $r \geq 1,\ h : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ wie in der Def. von Untermannigfaltigkeiten

Sätze

- $g : D \to \mathbb{R}^k \in \mathcal{C}^r, r \geq 1, c \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von $g \Rightarrow\ M := g^{-1}(c)$ $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $m = n - k$
- $g : D \to \mathbb{R}^k \in \mathcal{C}^r, r \geq 1, c \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von $g,\ M := g^{-1}(c)$ $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit $\dim(M) = n - k, p \in M \Rightarrow\ T_p M = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Dg(p)x = 0\} = \mathrm{Kern} Dg(p)$

- $f, g_1, .., g_k : D \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1, c \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von $g = (g_1, .., g_k)^T, M := g^{-1}(c)$:
  - $p \in M$ kritischer Punkt von $f_{|M} \Leftrightarrow\ p \in M$ kritischer Punkt von $f_{|p+T_pM}$ bzw.
  - p kritischer Punkt von f unter Nb. $g(x) = c \Leftrightarrow\ p$ kritischer Punkt von f unter Nb. $x - p \in T_p M = \mathrm{Kern} Dg(p)$ (**infinitisimale Nebenbedingung**)

9 Integration stetiger Funktionen mit kompaktem Träger

Definitionen

- $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n :\ \mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in D :\ f(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(0)}$ **Träger** von f
- $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $K(D) := \{f : D \to \mathbb{R} :\ \mathrm{supp} f \subset D\}$ (ein $\mathbb{R}$-Vektorraum)
- $\int_{\mathbb{R}^n} : K(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}x$ induktiv definiert durch:
  - $n = 1 :\ a > 0, \mathrm{supp} f \subset [-a, a] :\ \int_{\mathbb{R}} := \int_{-a}^a f(x) \mathrm{d}x$
  - $n \to n+1 :\ a > 0 :\ \mathrm{supp} f \subset [-a, a]^{n+1} :\ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}x,\ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{-a}^a f(t, x) \mathrm{d}t$

Sätze

- $[a, b]$ kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n, f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow\ \varphi : U \to \mathbb{R}, y \mapsto \int_a^b f(t, y) \mathrm{d}t$ stetig
- $f, g \in K(\mathbb{R}^n),\ (f_k)_k \subset K(\mathbb{R}^n),\ v \in \mathbb{R}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
  - **Linearität**: $\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g$
  - **Monotonie**: $f \leq g \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g$
  - **Translationsinvarianz**: $\tau_v f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x - v) \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_v f$
  - **Stetigkeit**: $\exists a > 0 :\ \mathrm{supp} f_k \subset [-a, a]^n\ \forall k \in \mathbb{N}, (f_k)_k$ gleichmäßig konvergent gegen $f \in K(\mathbb{R}^n)$ $\left(||f_k - f||_\infty \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0\right) \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f$
- $(f_k)_k \subset K(\mathbb{R}^n), f_k \geq f_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f = \mathrm{vol}\{(x, t) :\ 0 \leq t \leq f(x)\} - \mathrm{vol}\{(x, t) :\ f(x) \leq t \leq 0\}$
- $f \in K(\mathbb{R}^n), Q := \mathrm{supp} f \subset [-a, a]^n,\ k \in \mathbb{N}, j \in \{0, .., 2^k - 1\}^n : Q_{k,j} := \prod_{m=1}^n I_{k, j_m}, a_{k,j} := (-a + \frac{j_m}{2^{k-1}})_{m=1}^n, I_{k, j_m} := [-a + \frac{j_m}{2^{k-1}} a, -a + \frac{j_m + 1}{2^{k-1}} a]$
  $\Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k \to \infty} \sum_{j \in \{0, .., 2^k - 1\}^n} f(a_{k,j}) \mathrm{vol}_n Q_{k,j}$
- **Satz von Fubini**: $f \in K(\mathbb{R}^n), \pi \in \sum_n$ Permutation, $\mathrm{supp} f \subset [-a, a]^n \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{-a}^a .. \int_{-a}^a f(x_1, .., x_n) \mathrm{d}x_{\pi(1)} .. \mathrm{d}x_{\pi(n)}$
- **Substitutionsregel**: $f \in K(\mathbb{R}), \mathrm{supp} f \subset [-a, a], a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}} f(ax + b)|a| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{d}y$

- **Substitutionregel für lineare Abbildungen** des $\mathbb{R}^n$: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det A \neq 0, b \in \mathbb{R}^n, f \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)|\det A|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f$
- **Transformationssatz**: $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $f \in K(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\Phi(x)\big)|\det D\Phi(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{d}y$
- **allg. Transformationssatz**: $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $f \in K(V) = \{g : V \to \mathbb{R} :\ g \text{ stetig, supp} g \subset V \text{ kompakt}\}$ $\Rightarrow \int_U f\big(\Phi(x)\big)|\det D\Phi(x)|\mathrm{d}x = \int_V f(y)\mathrm{d}y$
- **partielle Integration**: $f \in K(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$:
  - $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d_i f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} d_x f = 0 \quad i = 1,..,n$
  - $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d_x f(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d_i g(x)\mathrm{d}x$

10 Integrierbare Funktionen

Definitionen

- $\int_\Omega : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ **Integral** auf der Menge $\Omega :\Leftrightarrow \ \forall f, g, f_k : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}, k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$:
  - **Linearität**: $\int_\Omega (af + bg) = a\int_\Omega f| + b\int_\Omega g$
  - **Monotonie**: $f \leq g \Rightarrow \ \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$
  - $f_k \geq f_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0\ \forall x \in \Omega \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k = 0$
  - $|f| \in \mathcal{L}$
- $(f_k)_k \subset \mathcal{L}$ **Fundamentalfolge** $:\Leftrightarrow\ f_k \leq f_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k < \infty$
- $A \subset \Omega$ **Nullmenge** $:\Leftrightarrow\ \exists$ Fundamentalfolge $(f_k)_k \subset \mathcal{L} :\ f_k(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ \forall x \in A$
- * gilt **fast überall** (f.ü.) :⇔ * gilt außerhalb einer Nullmenge ($\forall x \in \Omega \backslash A$, A Nullmenge)
- $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^+ :\Leftrightarrow\ \exists$ Fundamentalfolge $(f_k)_k \subset \mathcal{L} :\ f_k(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ f.ü.
- $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^+, (f_k)_k \subset \mathcal{L}$ Fundamentalfolge mit $f_k(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ f.ü.: $\int_\Omega f := \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k$ (wohldefiniert)
- $u : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1 :\Leftrightarrow\ \exists f, g \in \mathbb{L}^+ :\ u = f - g$
- $u : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1, u = f - g, f, g \in \mathcal{L}^+ :\ \int_\Omega u := \int_\Omega f - \int_\Omega g$ (wohldefiniert)
- $\mathcal{L} = K(\mathbb{R}^n), \Omega \subset \mathbb{R}^n$:
  - u **Lebesgue-integrierbar** $:\Leftrightarrow u \in \mathcal{L}^1$
  - $\int_{\mathbb{R}^n} u$ **Lebesgue-Integral** von $u \Leftrightarrow\ u \in \mathcal{L}^1$
  - $f : \Omega \to \mathbb{R} :\ \tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$ **triviale Erweiterung** von f
  - $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **Lebesgue-integrierbar** $\Leftrightarrow\ f \in \mathcal{L}^1(\Omega)\ :\Leftrightarrow\ \tilde{f}$ Lebesgue-integrierbar

  - $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\Omega) :\ \int_\Omega f := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$
- $M \subset \mathbb{R}^n$ **integrierbar** $:\Leftrightarrow\ \chi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$ integrierbar
  - $\mathrm{vol}(M) := \mu(M) := \int_M 1_M = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M$ **Volumen bzw. Maß** von M
- $M \subset \mathbb{R}^n$ **messbar** $:\Leftrightarrow\ M \cap B_R(0) = \{x \in M :\ ||x||_2 \leq R\}$ integrierbar $\forall R > 0$
- M messbar, nicht integrierbar: $\mu(M) := \infty$
- $\mu = \mu_n : \{M \subset \mathbb{R}^n :\ M \text{ messbar}\} \to\ [0, \infty]$ **Lebesgue-Maß**

Sätze

- $f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow\ \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := \min\{f, 0\} \in \mathcal{L}$
- A_k Nullmenge $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ Nullmenge
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R},\ \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind Nullmengen.
- $(f_k)_k \subset \mathcal{L},\ f_k \geq f_{k+1} \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N},\ f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ f.ü. $\Rightarrow\ \int_\Omega f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $(f_k)_k, (g_k)_k \subset \mathcal{L}$ Fundamentalfolgen, $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \overset{\text{f.ü.}}{\leq} \lim_{k\to\infty} g_k(x) =: g(x) \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k \leq \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k$
- $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$
- $f, g : \Omega \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^+, f \overset{\text{f.ü.}}{=} g \Rightarrow\ g \in \mathcal{L}^+, \int_\Omega g = \int_\Omega f$
- $\mathcal{L} = K(\mathbb{R}^n) :\ f = \chi_{\mathbb{Q}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases} \in \mathcal{L}^+,\ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{Q}^n} = 0$
- $f, g \in \mathcal{L}^+, a, b \geq 0$:
  - $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f^+ \in \mathcal{L}^+$
  - $af + bg \in \mathcal{L}^+,\ \int_\Omega (af + bg) = a\int_\Omega f + b\int_\Omega g$
  - $f \leq g$ f.ü. $\Rightarrow\ \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$
- $f, g, v, w \in \mathcal{L}^+, f - g \overset{\text{f.ü.}}{=} v - w \Rightarrow\ \int_\Omega f - \int_\Omega g = \int_\Omega v - \int_\Omega w$
- $\int_\Omega : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften eines Integrals.
- $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{R} :\ f \in R_a^b \Rightarrow\ f \in \mathcal{L}^1\big([a, b]\big)$
- $f : Q := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow\ f \in \mathcal{L}^1(Q),\ \int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} .. \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, .., x_n)\mathrm{d}x_1..\mathrm{d}x_n$
- M_1, M_2 integrierbar, $M_1 \subset M_2 \Rightarrow\ \mu(M_1) \leq \mu(M_2)$
- M Nullmenge $\Leftrightarrow\ M$ integrierbar, $\mu(M) = 0$

- $\mu_n(M) = 0 \quad \forall M \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
- $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar $\Rightarrow$ $M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2, M_1 \backslash M_2$ integrierbar und es gilt:
  - $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$
  - $\mu(M_1 \backslash M_2) = \mu\big(M_1 \backslash (M_1 \cup M_2)\big) = \mu(M_1) - \mu(M_1 \cap M_2)$
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow$ $\exists (f_k)_k \in K(\mathbb{R}^n):$ supp$f_k \subset U, 0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N},$ $f_k(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_U(x)$
  - U beschränkt $\Rightarrow$ $(f_k)_k$ Fundamentalfolge, $\chi_K \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, U integrierbar
- $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ K integrierbar, $\chi_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
- $A \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ offen, intbar: $A \subset U_\varepsilon, \mu(U_\varepsilon) < \varepsilon$

11 Berechnung von Integralen und Volumina

Definitionen

- $I \subset [0, \infty), r, R \in \mathbb{R}^+,$ $||.|| := ||.||_2$:
  - $K_n(I) := \{x \in \mathbb{R}^n:\ ||x|| \in I\}$
  - $B^n(R) := K_n([0, R]) = \{x \in \mathbb{R}^n:\ ||x|| \leq R\}$
  - $K_n([r, R]) := \{x \in \mathbb{R}^n:\ r \leq ||x|| \leq R\}$ **Kreisring, Annulus**
  - $K_n\big((r, \infty)\big) := \{x \in \mathbb{R}^n:\ r < ||x||\}$
  - f **rotationssymmetsich** $:\Leftrightarrow$ $g: I \to \mathbb{R}, f: K_n(I) \to \mathbb{R}, x \mapsto g(||x||)$
- $K \subset \mathbb{R}^n$ **mit konstanter Massendichte** $\mu :\Leftrightarrow$ $\mu: K \to (0, \infty), x \to$ const. Massendichtefunktion
  - $M(K) := \int_K \mu(x)\mathrm{d}x$ **Gesamtmasse des Körpers**
  - $M(K) \neq 0:$ $S(K) := \frac{1}{M(K)} \begin{pmatrix} \int_K x_1 \mu(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_K x_n \mu(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}$ **Schwerpunkt** von K

Sätze

- **Transformationssatz**: $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $f: V \to \mathbb{R}, g: U \to \mathbb{R}, x \mapsto f\big(\Phi(x)\big)|\det D\Phi(x)|:$ $f \in \mathcal{L}^1(V)$ $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{L}^1(U)$ $(\Rightarrow \int_V f = \int_U g)$
- $M \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $aM := \{ax:\ x \in M\}$ integrierbar, $\mu(aM) = |a|^n \mu(M)$
- $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus:
  - $A \subset U$ Nullmenge $\Leftrightarrow$ $\Phi(A)$ Nullmenge
  - $B \subset V$ Nullmenge $\Leftrightarrow$ $\Phi^{-1}(B)$ Nullmenge

- **Satz von Fubini**: $f: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R},$ $y \in \mathbb{R}^n, f(\cdot, y): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, y), f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n}) \Rightarrow$ $\exists A \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge: $\forall y \in \mathbb{R}^n \backslash A\ f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$,
  $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y \to \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\mathrm{d}x & y \notin A \\ 0 & y \in A \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F$
- $I \subset [0, \infty)$ Intervall, $g: I \to \mathbb{R}, f: K_n(I) \to \mathbb{R}, x \mapsto g(||x||)$ (f rotationssymmetrisch) : $f \in \mathbb{L}^1\big(K_n(I)\big) \Leftrightarrow$ $h: I \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{n-1} g(x)$ integrierbar, $h \in \mathbb{L}^1(I)$
  $\Rightarrow$ $\int_{K_n(I)} f = n\tau_n \int_I h$, wobei $\tau_n := \mathrm{vol}_n\big(B^n(1)\big)$
- $\int_\mathbb{R} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$
- $a \in \mathbb{R}, f_a: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||_2{}^a$:
  - f_a über B^n oder $B^n(R)$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $a > -n$
  - f_a über $\mathbb{R}^n \backslash B^n$ oder $\mathbb{R}^n \backslash B^n(R)$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $a < -n$
- **Cavalieri'sches Prinzip**: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K_t := \{x \in \mathbb{R}^{n-1}:\ \ (x, t) \in K\} \subset \mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\mathrm{vol}_n(K) = \int_\mathbb{R} \mathrm{vol}_{n-1}\mathrm{d}t$
- $K \subset \mathbb{R}^n$ mit konstanter Massendichte μ, $T \in O(n)$ orthogonale Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $L := T(K) + b = \{Tx + b:\ x \in K\} Rightarrow\ S(L) = T\big(S(K)\big) + b$

12 Kurvenintegrale

Definitionen

- $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ **Kurve bzw. Weg** in $\mathbb{R}^n :\Leftrightarrow$ $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, γ stetig
  - $\gamma(I)$ **Spur der Kurve**
  - γ **stückweise differenzierbar** $:\Leftrightarrow$ $\exists a_1, .., a_k \in I:$ $\gamma_{|I \backslash \{a_1, .., a_k\}}$ diff.bar, $\forall a_i, i = 1, .., k\ \exists$ rechts- und linksseitige Ableitungen
  - γ stückweise diff.bar: $\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t),$ $t \in I \backslash \{a_1, .., a_k\}$ **Geschwindigkeitsvektor** von γ zur Zeit t
  - γ stückweise diff.bar: γ **nach der Bogenlänge parametrisiert** $:\Leftrightarrow$ $||\dot{\gamma}(t)||_2 = 1$ $\forall t \in I \backslash \{a_1, .., a_n\}$
  - γ stückweise diff.bar: $L(\gamma) := \int_I ||\dot{\gamma}(t)||_2\mathrm{d}t$ **Länge** von γ
- $\gamma \circ \sigma: J \to \mathbb{R}^n$ **Umparametrisierung** von $\gamma: I \to \mathbb{R}^n :\Leftrightarrow$ $\sigma: J \to I$ bijektiv, σ, σ^{-1} stetig
- $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stückweise $\mathcal{C}^1$, $f: \gamma(I) \to \mathbb{R}$ stetig:
  $\int_\gamma f\mathrm{d}s := \int_I f\big(\gamma(t)\big)||\dot{\gamma}(t)||\mathrm{d}t$ **skalares Kurven- bzw. Wegintegral** von f längs γ
- v **Vektorfeld** auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n :\Leftrightarrow$ $v: \omega \to \mathbb{R}^n$ stetig
  - $v \in \mathcal{C}^k:$ v $\mathcal{C}^k$**-Vektorfeld**
  - $\gamma: I \to \Omega$ stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve: $\int_\gamma < v, \mathrm{d}x > := \int_I < v\big(\gamma(t)\big), \dot{\gamma}(t) > \mathrm{d}t := \int_I \sum_{k=1}^n v_k\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}_k(t)\mathrm{d}t$ **vektorielles Kurven- bzw. Wegintegral** von v längs γ

  - v **konservativ bzw. exakt** $:\Leftrightarrow$ $[\gamma_i : [a_i, b_i] \to \Omega, i = 1, 2$ Wege $\Rightarrow \int_{\gamma_1} < v, \mathrm{d}x >= \int_{\gamma_2} < v, \mathrm{d}x >]$

Sätze

- $\gamma : I \to \mathbb{R}$ Kurve, $\gamma \circ \sigma : J \to \mathbb{R}$ Umparametrisierung $\Rightarrow \gamma(I) = (\gamma \circ \sigma)(J)$
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stückweise $\mathcal{C}^1, f : \gamma(I) \to \mathbb{R}$ stetig, $\widetilde{\gamma} := \sigma \circ \gamma$ Umparametrisierung $\Rightarrow \int_\gamma f \mathrm{d}s = \int_{\widetilde{\gamma}} f \mathrm{d}s$
- γ stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve, $\gamma \circ \sigma$ Umparametrisierung:
  - $\dot{\sigma} > 0 \Rightarrow \int_\gamma < v, \mathrm{d}x >= \int \gamma \circ \sigma < v, \mathrm{d}x >$
  - $\dot{\sigma} < 0 \Rightarrow \int_\gamma < v, \mathrm{d}x >= -\int \gamma \circ \sigma < v, \mathrm{d}x >$
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \Omega \in \mathcal{C}^1,\ v = \nabla F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ **Gradientenvektorfeld** $\Rightarrow v$ konservativ
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ konservativ $\Rightarrow \exists F : \Omega \to \mathbb{R}^n \in \mathbb{C}^1 :\ v = \nabla F$
  (F **Stammfunktion bzw. Potential** von v)