# Zusammenfassung zu Analysis IIIA

Sara Adams

9. August 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
**Analysis IIIA**
gehalten im Wintersemester 2003/04
**von Prof. Dr. Thomas Bartsch**
an der Justus-Liebig Universität Gießen





## Inhaltsverzeichnis

# Teil I
# Holomorphe Funktionen

## 1 Komplexe Zahlen und Funktionen

### Grundlagen

- $\mathbb{C} = \{x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}, \dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$
- $z = x + iy \in \mathbb{C} : \ \Re(z) = x, \Im(z) = y, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \overline{z} = x - iy, |z|^2 = z\overline{z}$
- $z \neq 0 : \ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **Polarkoordinaten**:
  - $r = |z|$ Länge von $z$
  - $\varphi$ Argument von $z$ : $\arg : \dot{\mathbb{C}} \to (-\pi, \pi]$
  - $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ : Hauptwert des Arguments
  - $\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \notin (-\pi, \pi]$ Nebenwerte des Arguments
- **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$
  - $\exp(0) = 1, \ e = \exp(1), \ e^z = \exp(z)$
  - $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$
  - $\exp(-z) = \exp(z)^{-1}, \ \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
  - $|\exp(z)| = \exp\big(\Re(z)\big), \ |\exp(iy)| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
  - $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \ \Re(z) = \Re(w), \Im(z) - \Im(w) = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
  - $\exp(\mathbb{C}) = \dot{\mathbb{C}}$
  - $\exp_{|S} : S := \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \Im(z) \leq \pi\} \to \dot{\mathbb{C}}$ bijektiv
- **Sinus, Cosinus** $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  - $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$
  - $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$

### Definitionen

- $\log : \dot{\mathbb{C}} \to S, z \mapsto \ln(z) + i\arg(z)$ **Hauptwert des komplexen Logarithmus**
  - $w = \log(z) \Rightarrow \ e^w = z$
  - $\log(z) + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$ $k$-ter **Nebenwert des Logarithmus**
  - $e^w = z \Leftrightarrow \ w = \log + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$
- $a \in \dot{\mathbb{C}}, b \in \mathbb{C} : \ a^b := \exp\big(b\log(a)\big)$ **Hauptwert der Potenz**
  - $\exp\big(b(\log a + 2k\pi i)\big) = \exp\big(b\log(a)\big) \cdot \exp(2kb\pi i)$ $k$-ter **Nebenwert der Potenz**
  - $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ \exp(2kb\pi i) = 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}$
  - $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ z^n$ eindeutig bestimmt
  - $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, (n, m) = 1, n > 1 \Rightarrow \ a^{\frac{m}{n}}$ $n$-wertig
  - $\sqrt[n]{\ } : \dot{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\exp(i\frac{\arg(z)}{n})$ **Hauptwert der $n$-ten Wurzel**
- $D \subset \mathbb{C}$ **Gebiet** $:\Leftrightarrow$ $D$ offen, wegzusammenhängend
- $f : D \to \mathbb{R}$ **Zweig des Arguments** $:\Leftrightarrow$ $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f$ stetig, $z = |z| \cdot \exp\big(if(z)\big) \quad \forall z \in D$
  - $\arg : \dot{\mathbb{C}}\backslash\{\mathbb{R}^-\} \to (-\pi, \pi)$ **Hauptzweig des Arguments**
- $f : D \to \mathbb{C}$ **Zweig des Logarithmus** $:\Leftrightarrow$ $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f$ stetig, $\exp\big(f(z)\big) = z \quad \forall z \in D$
  - $\arg : \dot{\mathbb{C}}\backslash\{\mathbb{R}^-\} \to S = \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \Im(z) < \pi\}$ **Hauptzweig des Logarithmus**
- $f : D \to \mathbb{R}$ **Zweig der $n$-ten Wurzel** $:\Leftrightarrow$ $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f$ stetig, $f(z)^n = z \quad \forall z \in D$
  - $\arg : \dot{\mathbb{C}}\backslash\{\mathbb{R}^-\} \to \{z \in \mathbb{C} : \ -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ **Hauptzweig der $n$-ten Wurzel**



## 2 Komplex differenzierbare Funktionen

**In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$, falls nicht anders deklariert.**

### Definitionen

- $f$ **komplex differenzierbar** in $a \in D :\Leftrightarrow \ \exists \ \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$
- $f$ **komplex diff.bar bzw. holomorph** $:\Leftrightarrow$ $f$ komplex diff.bar in $a \ \forall a \in D$
  - $f'$ **Ableitung** von $f$
  - $f$ **Stammfunktion** von $f'$
- $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Re\big(f(x+iy)\big) \\ \Im\big(f(x+iy)\big) \end{pmatrix}, \ \tilde{z} := \begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix}$ **reelle Schreibweise**
- $f$ **konform** $:\Leftrightarrow$ $f$ holomorph, $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$
- $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **Drehstreckung** $:\Leftrightarrow \ \exists \ a, b \in \mathbb{R} : \ L(x) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot x$
- $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **reell linear** $:\Leftrightarrow$ $L(aw + bz) = aL(w) + bL(z) \ \forall w, z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$
- $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **komplex linear** $:\Leftrightarrow$ $L(aw + bz) = aL(w) + bL(z) \ \forall w, z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{C}$
- $f : D \to f(D)$ **biholomorph** $:\Leftrightarrow$ $f$ bijektiv und holomorph, $f^{-1}$ holomorph

## Sätze

- $f$ in $a \in D$ komplex diff.bar $\Rightarrow$ $f$ in $a$ stetig
- $f$ komplex diffbar in $a \in D$, $f'(a) = \lambda$
  $\Leftrightarrow \quad \exists r : D \to \mathbb{C} : \ f(z) = f(a) + \lambda(z-a) + r(z), \ \frac{r(z)}{z-a} \xrightarrow{z \to 0} 0$
  $\Leftrightarrow \quad \varphi : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ \lambda & z = a \end{cases}$ stetig in $a$ $\big($gilt: $f(z) = f(a) + \varphi(z) \cdot (z-a)\big)$
- $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $a$ komplex diff.bar:
  - $f \pm g$ in $a$ komplex diff.bar, $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
  - $f \cdot g$ in $a$ komplex diff.bar, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
  - $f(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ komplex diff.bar, $(\frac{1}{f})'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)^2}$
- $f : D \to D', g : D' \to \mathbb{C}$, $f$ in $a \in D$ komplex diff.bar, $g$ in $f(a) \in D'$ komplex diff.bar $\Rightarrow$ $g \circ f$ in $a$ komplex diff.bar, $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0 \Rightarrow$ $f : U_R(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}$ holomorph, $f' : U_R(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$
- $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$
- $f$ komplex diff.bar in $z_0$ mit $f'(z_0) = a + ib \Leftrightarrow \tilde{f}$ diff.bar in $\tilde{z_0}$ mit $D\tilde{f}(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
- **Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung**:
  $f = \Re(f) + i\Im(f) =: u + iv$ komplex diff.bar $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
- $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex linear $\Leftrightarrow$ $\widetilde{L}$ Drehstreckung $\Leftrightarrow$ $L$ komplex diff.bar
- $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \triangle\Re(z) = \triangle\Im(z) = 0$ (Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen sind harmonisch.)
- $D$ Gebiet: $f$ konstant $\Leftrightarrow$ $f$ holomorph, $f' \equiv 0$
- $f$ holomorph: $f$ konstant $\Leftrightarrow \Re(f)$ konstant $\Leftrightarrow \Im(f)$ konstant
- $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph:
  - $\Re(f) = \Re(g) \Rightarrow \Im(f) - \Im(g) \equiv$ const.
  - $\Im(f) = \Im(g) \Rightarrow \Re(f) - \Re(g) \equiv$ const.
- **Satz von der lokalen Umkehrfunktion**: $f$ holomorph, $f'$ stetig, $z_0 \in D : \ f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U$ offene Umgebung um $z_0 :\ f_{|U} : U \to f(U)$ bijektiv, $f(U)$ offen, $g : (f_{|U})^{-1} : f(U) \to U$ holomorph, $g'(w) = \frac{1}{f}\big(g(w)\big) \ \forall w \in f(U)$, $g'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \ \forall z \in U$
- $f$ Zweig des Logarithmus $\Rightarrow$ $f$ holomorph, $f'(z) = \frac{1}{z}$
- $\nexists\, F : \dot{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} : F$ Stammfunktion von $f : \dot{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ $(F' = f)$



# 3 Das komplexe Kurvenintegral

## Definitionen

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ **stückweise diff.bar bzw. glatt** $:\Leftrightarrow$ $\gamma$ stetig, $\exists a_1, .., a_{n-1} \in [a,b] :\ a = a_0 < .. < a_{n-1} < a_n = b :\ \gamma_{|[a_k, a_{k+1}]}$ stetig diff.bar $\forall k = 0, .., n-1$
- $D \subset \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$ **komplexes Wegintegral bzw. Kurvenintegral** von $f$ längs $\gamma$
- $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0 :\ B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| \leq r\}, \partial B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| = r\}$
- $\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z := \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) ire^{it}\mathrm{d}t$
- $\oint_\gamma \ \Leftrightarrow$ Integral über einen geschlossenen Weg $\gamma$
- $L(\gamma)$ **(Bogen-)Länge** von $\gamma :\Leftrightarrow \ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t$

## Sätze

- $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ Umparametrisierung $\Rightarrow$ $\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$
- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto t \Rightarrow \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z$
- Das komplexe Wegintegral ist komplex linear.
- $f$ besitzt Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C} \Rightarrow \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$
- $z_0 \in \mathbb{C} :\ \int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$
- $z_0 \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z} :\ \gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{z_0\}, t \mapsto z_0 + re^{ikt} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = k$
- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ geschlossener Weg $\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z \in \mathbb{Z}$
- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} :\ |\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z| \leq \sup |f \circ \gamma| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t$
  - $\big|f\big(\gamma(t)\big)\big| \leq C \ \forall t \in [a,b] \Rightarrow |\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \leq C \cdot L(\gamma)$
- $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$:
  $f$ besitzt eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$
  $\Leftrightarrow \quad \forall \gamma : [a,b] \to D$ geschlossen, stückweise glatt: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$
  $\Leftrightarrow \quad \big[\gamma_i : [a_i, b_i] \to D, i = 1,2$ stückweise glatt, $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$
  $\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\big]$

# 4 Der Cauchy'sche Integlalsatz

## Definitionen

- $z_0 \in \mathbb{C},\ \alpha,\beta > 0:\ Q_0 = Q(z_0,\alpha,\beta) := \{z_0 + s\alpha + ir\beta:\ r,s \in [0,1]\}$
- $\gamma_0 : [0,4] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} z_0 + t\alpha & t \in [0,1] \\ z_0 + \alpha + i(t-1)\beta & t \in [1,2] \\ z_0 + (3-t)\alpha + i\beta & t \in [2,3] \\ z_0 + i(4-t)\beta & t \in [3,4] \end{cases}$
- $\int_{\partial Q_0} f(z)\mathrm{d}z := \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z$
- $D \subset \mathbb{C}$ **einfach zusammenhängendes** Gebiet $:\Leftrightarrow$ $D$ Gebiet, $\big[\gamma_0,\gamma_1 : [a,b] \to D \in \mathcal{C}^1, \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \Rightarrow \exists\varphi : [a,b]\times[0,1] \to D \in \mathcal{C}^1 :\ \varphi(t,0) = \gamma_0(t), \varphi(t,1) = \gamma_1(t)\ \forall t \in [a,b]\big]$
- $D$ **konvex** $:\Leftrightarrow$ $z_0, z_1 \in D \Rightarrow sz_1 + (1-s)z_0 \in D\ \forall s \in [0,1]$
- $D$ **sternförmig** $:\Leftrightarrow$ $\exists z_0 \in D:\ sz_1 + (1-s)z_0 \in D\ \forall z_1 \in D, s \in [0,1]$

## Sätze

- **Cauchy'scher Integralsatz für Rechtecke**:
  $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $Q_0 \subset D \Rightarrow \int_{\partial Q_0} f(z)\mathrm{d}z = 0$
- **Cauchy'scher Integralsatz für Bilder von Rechtecken**:
  $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C},\ \alpha,\beta > 0,\ \varphi : Q(z_0,\alpha,\beta) \to \mathbb{C}$ stetig diff.bar (reell): $\varphi\big(Q(z_0,\alpha,\beta)\big) \subset D \Rightarrow \int_{\varphi(\partial Q_0)} f(z)\mathrm{d}z = 0$
- $D \subset \mathbb{C}$ konvex $\Rightarrow$ $D$ einfach zusammenhängend, $\varphi(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$
- $D \subset \mathbb{C}$ sternförmig $\Rightarrow$ $D$ einfach zusammenhängend
- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\ \forall \gamma_0,\gamma_1 : [a,b] \to D \in \mathcal{C}^1$ stückweise, $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow$ $f$ besitzt eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$
- $\dot{\mathbb{C}}$ ist nicht einfach zusammenhängend

# 5 Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

**In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, falls nicht anders deklariert.**



## Definitionen

- $g : D_g \to \mathbb{C}$ **analytisch** $:\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in D_g\ \exists r > 0, (a_n)_n \subset \mathbb{C}:\ K_r(z_0) \subset D_g, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\quad \forall z \in K_r(z_0)$
- $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **ganze Funktion** $:\Leftrightarrow$ $g$ holomorph

## Sätze

- **Cauchy'scher Integralsatz für Kreisscheiben**: $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}:\ |z-z_0| \le r\} \subset D, a \in \mathbb{C}:\ |a-z_0| < r \Rightarrow\ f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$
- **Mittelwertsatz**: $z_0 \in D, r > 0, K_r(z_0) \subset D \Rightarrow\ f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\mathrm{d}t$ **Mittelwert** von $f$ auf $\partial K_r(z_0)$
- $z_0 \in D, r > 0, K_r(z_0) \subset D \Rightarrow\ \max_{z\in K_r(z_0)}|f(z)| = \max_{z\in\partial K_r(z_0)}|f(z)|$
- **Potenzreihenentwicklungssatz**: $z_0 \in D, R := \sup\{r > 0:\ K_r(z_0) \subset D\} \in (0,\infty] \Rightarrow a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w$ unabhängig von $r \in (0,R)$, $\big[|z-z_0| < R \Rightarrow\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\big]$
- $f$ holomorph $\Rightarrow$ $f$ beliebig oft komplex diff.bar
- $g : D_g \to \mathbb{C}$ besitzt Stammfunktion $\Rightarrow$ $g$ holomorph
- $z_0 \in D, K_r(z_0) \subset D, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ \forall z \in K_r(z_0),\ M(r) := \max\{|f(z)| : |z-z_0| = r\} = \max_{\partial K_r(z_0)}|f| \Rightarrow\ |a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$
- **Satz von Liouville**: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt, holomorph $\Rightarrow$ $f$ konstant
- $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz $\Rightarrow$ $g$ lässt sich global durch **eine** Potenzreihe darstellen.
- **Fundamentalsatz der Algebra**: Jedes Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_n \ne 0, n \ge 1$ ist ein Produkt aus $n$ Linearfaktoren $f(z) = a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ mit geeigneten $z_k \in \mathbb{C}$
- **Riemannscher Fortsetzungssatz**: $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, K_r(z_0)\backslash\{z_0\} \subset D$:
  $f$ holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzbar
  $\Leftrightarrow$ $f$ stetig auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzbar
  $\Leftrightarrow$ $f\big(K_r(z_0)\backslash\{z_0\}\big) \subset \mathbb{C}$ beschränkt
  $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0) = 0$
- **Identitätssatz**: $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f,g : D \to \mathbb{C}$ holomorph:
  $f \equiv g$
  $\Leftrightarrow$ $\{z \in D:\ f(z) = g(z)\}$ hat Häufungspunkt in $D$
  $\Leftrightarrow$ $\exists z_0 \in D:\ f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)\quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $I \subset \mathbb{R}$ offen, $g : I \to \mathbb{R}$ analytisch $\Rightarrow$ $\exists$ Fortsetzung von $g$ in offene Teilmenge von $\mathbb{C}$
- **Existenzsatz für Nullstellen**: $K_r(z_0) \subset D, |f(z_0)| < \min_{z\in\partial K_r(z_0)}|f(z)| \Rightarrow\ \exists z_N \in K_r(z_0):\ f(z_N) = 0$
- **Satz von der Gebietstreue**: $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, nichtkonstant:

- $G \subset D$ Gebiet $\Rightarrow$ $f(G) \subset \mathbb{C}$ Gebiet
- $U \subset D$ offen $\Rightarrow$ $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen

- **Maximumsprinzip**:
  - $D$ Gebiet, $\exists z_0 \in D: \ |f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)| \Rightarrow$ $f$ konstant
  - $D$ beschränktes Gebiet, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig, $f_{|D}$ holomorph $\Rightarrow$ $|f| : D \to \mathbb{R}$ nimmt Maximum auf $\partial D$ an $\big(\forall z_0 \in \overline{D}: \ |f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|\big)$

# 6 Isolierte Singularitäten

**In diesem Abschnitt sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, falls nicht anders deklariert.**

## Definitionen

- $z_0 \in \mathbb{C} \backslash D$ **isolierte Singularität** $:\Leftrightarrow$ $\exists r > 0: \ K_r(z_0) \backslash \{z_0\} \subset D$
  - $z_0$ **hebbar** $:\Leftrightarrow$ $f$ lässt sich holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzen
  - $z_0$ **Pol** der Ordnung $k \geq 1$ $:\Leftrightarrow$ $z_0$ hebbare Singularität von $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$, $k$ minimal
  - $z_0$ **wesentlich** $:\Leftrightarrow$ $z_0$ weder hebbar, noch Pol

- **Laurentreihe** um $z_0$ $:\Leftrightarrow$ $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}}_{\textbf{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\textbf{Nebenteil}}$

- Laurentreihe **konvergent** in $z$ $:\Leftrightarrow$ Haupt- und Nebenteil sind in $z$ konvergent
  - $R$ Konvergenzradius des Nebenteils
  - $R'$ Konvergenzradius des Hauptteils, $r := \frac{1}{R'}$

- $g : \{z \in \mathbb{C}: \ r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n :$ $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| < \varrho} f(z) \mathrm{d}z$ **Residuum der Laurentreihe**
  - $r = 0:$ $a_{-1}$ **Residuum** von $f$ in $z_0$

## Sätze

- $f^{(m)}(z_0) = 0 \ \forall m = 0, .., k-1, f^{(k)}(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ hat einen Pol $k$.ter Ordnung bei $z_0$

- **Großer Satz von Picard**: $z_0$ wesentliche Singularität von $f$ $\Rightarrow$ $\big(f(D \cap U_r(z_0)) = \mathbb{C} \ \forall r > 0\big)$ **xor** $\big(\exists w \in \mathbb{C}: \ f(D \cup U_r(z_0)) = \mathbb{C} \backslash \{w\} \ \forall r > 0\big)$

- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ Laurentreihe, $R, R'$ Konvergenzradius des Neben- bzw. Hauptteils, $r := \frac{1}{R'}$ $\Rightarrow$ Laurentreihe konvergiert in $\{z \in \mathbb{C}: \ r < |z - z_0| < R\}$
  - $r = 0$ (d.h. $R' = \infty$)$\Rightarrow$ $z_0$ isolierte Singularität von $\{z \in \mathbb{C}: \ 0 < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$



  - $K \subset U_R(z_0)$ kompakt $\Rightarrow$ $K \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig
  - $K \subset U_r(z_0)$ kompakt $\Rightarrow$ $K \to \mathbb{C}, w \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ konvergiert gleichmäßig

- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ Laurentreihe:
  - $a_{-1} = 0 \Leftrightarrow$ Hauptteil hat Stammfunktion $\Big(\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{a_{-n}}{n-1} \frac{1}{(z - z_0)^{n-1}}\Big)$
  - Nebenteil hat Stammfunktion $\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}\Big)$

- $\varrho \in (r, R) \Rightarrow$ $\int_{|z - z_0| = \varrho} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot a_{-1}$

- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \varrho \in (r, R) \Rightarrow$ $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}z$

- **Laurentreihenentwicklungssatz**: $0 \leq r \leq R \leq \infty, f : \{z \in \mathbb{C}: \ r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$ unabhängig von $\varrho \in (r, R) \ \forall n \in \mathbb{Z}$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$

- $z_0$ isolierte Singularität von $f$, $R := \sup\{r > 0: \ K_r(z_0) \backslash \{z_0\} \subset D\}, \varrho \in (0, R) \Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \ \forall z \in U_R(z_0), a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = \varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w$
  - $z_0$ hebbar $\Leftrightarrow$ $a_n = 0 \ \forall n < 0 \Leftrightarrow$ $f_{|D \cap K_r(z_0)}$ beschränkt $\forall 0 < r < R$
  - $z_0$ Pol $\Leftrightarrow$ $\inf\{n \in \mathbb{Z}: \ a_n \neq 0\} \in (-\infty, -1] \Leftrightarrow$ $|f(z)| \xrightarrow{z \to z_0} \infty$
  - $z_0$ wesentlich $\Leftrightarrow$ $\inf\{n \in \mathbb{Z}: \ a_n \neq 0\} = -\infty \Leftrightarrow$ $|f(z)|$ konvergiert nicht (gegen ein $z^* \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) für $z \to z_0$

# 7 Die Umlaufzahl

## Definitionen

- $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Hochhebung** von stetigem $\gamma : [a, b] \to S^1 \Leftrightarrow$ $\omega$ stetig, $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} \ \forall t \in [a, b]$

- $\gamma : [a, b] \to \dot{\mathbb{C}}$ stetig, geschlossen, $\omega$ Hochhebung von $\frac{\gamma}{|\gamma|} : [a, b] \to S^1 :$ $n(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi}\big(\omega(b) - \omega(a)\big)$ **Umlaufzahl** von $\gamma$ um 0

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ geschlossener Weg, $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \{\mathrm{Bild}(\gamma)\} :$ $n(\gamma, z_0) := n(\gamma - z_0, 0) \in \mathbb{Z}$ **Umlaufzahl** von $\gamma$ um $z_0$

- $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Bild}(\gamma)$ wird **von** $\gamma$ **umlaufen** $:\Leftrightarrow$ $n(\gamma, z_0) \neq 0$

## Sätze

- $\gamma : [a, b] \to S^1 \subset \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ $\exists \omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} \ \forall t \in [a, b]$
  - $\omega(a)$ fest $\big[$etwa $\omega(a) = \arg\big(\gamma(a)\big) \in (-\pi, \pi]\big]$ $\Rightarrow$ $\omega$ eindeutig bestimmt

- $\omega_1, \omega_2$ Hochhebungen von $\gamma \Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: \ \omega_1(t) - \omega_2(t) = 2k\pi \ \forall t \in [a, b]$

- $\gamma : [a, b] \to D$ geschlossener Weg $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: \ \omega(a) - \omega(b) = 2k\pi$

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, geschlossen, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma) \Rightarrow \; n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z_0} \mathrm{d}t$
- **Allgemeine Cauchy'sche Integralformel**: $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to D$ stückweise $\mathcal{C}^1$, geschlossen, $[z \notin D \Rightarrow n(\gamma, z) = 0], z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma) \Rightarrow \; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = n(\gamma, z_0) \cdot f(z_0)$
- **Cauchy'scher Integralsatz**: $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to D$ stückweise glatt, geschlossen: $\; n(\gamma, z) = 0 \; \forall z \in \mathbb{C} \setminus D \Rightarrow \; \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0$

# 8 Der Residuensatz

### Definitionen

- $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ isolierte Singulartät von $f$: $\; \mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} f(z) \mathrm{d}z = a_{-1}$ **Residuum von $f$ in** $z_0$, wobei $r > 0 : \; K_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$

### Sätze

- $\gamma : [a,b] \to D$ stückweise $\mathcal{C}^1$, geschlossen, $\gamma$ umlaufe die isolierten Sigularitäten $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C} \setminus D$ von $f$ und keine weiteren Punkte aus $\mathbb{C} \setminus D \Rightarrow \; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \mathrm{res}_{z_j} f$
- $P, Q \in \mathbb{P}, Q(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}, \deg Q \geq \deg P + 2 : \; \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}, Q(z) = 0, \Im(z) > 0} \mathrm{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)}$
- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\{z \in \mathbb{C} : \; \Im(z) \geq 0\} \setminus \{z_1, .., z_k\} \subset D$ ($f$ hat nur endlich viele Singularitäten in der oberen Halbebene) $\Im(z_1), .., \Im(z_k) > 0, \; f(z) \xrightarrow{| \to z} |\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{ix} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^k \mathrm{res}_{z_j} \big(f(z) e^{iz}\big)$
  - $f(x) \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Anwendung auf $\int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(x) \mathrm{d}x, \; \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(x) \mathrm{d}x$

# Teil II
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 9

### Definitionen

- 

### Sätze

- 



## 10

### Definitionen

- 

### Sätze

- 

## 11

### Definitionen

- 

### Sätze

- 

## 12

### Definitionen

- 

### Sätze

- 

## 13

### Definitionen

- 

### Sätze

- 

## 14

### Definitionen

- 

### Sätze

- 

## 15

### Definitionen

- 

### Sätze

- 