Zusammenfassung zu Funktionalanalysis

Sara Adams

27. Januar 2005

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Funktionalanalysis
gehalten im Wintersemester 2004/05
von Prof. Dr. rer. nat. habil. Krzysztof Piotr Rybakowski
an der Universität Rostock

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Räume **3**
1.1 Räume . . . 3
1.2 Halbnormen und Normen . . . 3
1.3 Beschränktheit und Vollständigkeit . . . 4
1.4 Endlichdimensionale normierte Räume . . . 4
1.5 Der Dualraum und Vervollständigungen . . . 5
1.5.1 Rieszsches Lemma . . . 6

2 Hilberträume **6**
2.1 Skalarprodukte . . . 6
2.2 Orthogonalität . . . 7
2.3 Die Allgemeine Approximationsaufgabe . . . 7
2.4 Der Satz von Fréchet-Riesz . . . 8
2.5 Orthonormalbasen . . . 8
2.5.1 Exkurs: Partielle Ordnungen . . . 8
2.6 Der Satz von Radon-Mikodyn . . . 9
2.7 Der Bairesche Kategoriensatz . . . 9
2.8 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 10
2.9 Der Satz von Banach-Steinhaus . . . 10
2.10 Das Cantorsche Diagonalverfahren . . . 10
2.11 Schwache Konvergenz in Hilberträumen . . . 10
2.12 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach . . . 11

3 Das Prinzip der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen **12**

4 Der Satz von Arzelà-Ascoli **13**

5 Differentialgleichungen **13**

6 Symmetrsiche, kompakte Operatoren und der Spektralsatz **14**

1 Normierte Räume

1.1 Räume

1. Seien A, B Mengen, $Abb(A,B) := \{f : A \to B \text{ Funktion }\}$
   B $\mathbb{K}$-Vektorraum:
   - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in A$
   - $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)\ \forall x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}$

   $Abb(A,B)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum
2. **Funktionenräume** sind lineare Unterräume von $Abb(A,B)$
   B ist $\mathbb{K}$-Vektorraum, meistens $B = \mathbb{K}^n$
3. Für $A = \mathbb{N}$ sprechen wir auch von **Folgenräumen**
   - $(S) := Abb(\mathbb{N},\mathbb{K}) \qquad (a_n)_n \in (S)$
   - $(C) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S) :\ (a_n)_n \text{ konvergent }\}$
   - $(C_0) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S) :\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$
4. Sei $B = \mathbb{K}^n$
   $\mathcal{B}(A,B) := \{f : A \to B :\ f \text{ beschränkt}\}$
   f beschränkt $\Leftrightarrow\ \exists c \in (0,\infty) :\ \forall x \in A :\ |f(x)| \le c$
5. Sei A metrischer oder typologischer Raum
   $\mathcal{C}(A,B) := \{f : A \to B :\ f \text{ stetig}\}$
   A kompakt $\Rightarrow\ \mathcal{C}(A,B) \subset \mathcal{B}(A,B)$
6. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ Maßraum, $1 \le p < \infty$
   $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} :\ f\ \mathfrak{A}\text{-messbar},\ \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ $\mathbb{K}$-linearer Raum

1.2 Halbnormen und Normen

1. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ heißt **Halbnorm** auf E :$\Leftrightarrow$
   - $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E :\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
   - $\forall x,y \in E :\ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$
2. Eine Halbnorm $\|.\|$ heißt **Norm** :$\Leftrightarrow\ \forall x \in E :\ (\|x\| = 0 \Rightarrow\ x = 0)$
3. Sei $\|.\|$. eine Halbnorm auf E. Dann gilt: $\|0\| = 0,\ \|x\| \ge 0$
4. Sei $B = \mathbb{K}^n$. Dann ist $\|f\| := \sup_{x\in A} |f(x)|$ eine Norm auf $\mathcal{B}(A,B)$
5. $(C) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K}) \Rightarrow\ \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ ist Norm auf (C)
6. E $\mathbb{K}$-Vektorraum, $F \subset E$ linearer Unterraum, $\|.\|$ Halbnorm auf $E \Rightarrow\ \|.\|_{|F}$ Halbnorm auf F
7. Im Fall von kompaktem A und $B = \mathbb{K}$ wird $\mathcal{C}(A,B)$ meist mit der Supremumsnorm versehen.
8. $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu) :\quad \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$

9. Sei $\|.\|$ eine Halbnorm auf E. Wir betrachten dann die folgende Relation auf E:
   $xRy :\Leftrightarrow\ \|x-y\| = 0$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Folglich ist E/R ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|[x]_R\| := \|x\|$
10. Ist $\|.\|$ eine Halbnorm auf E, so ist $d : E \times E \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|x-y\|$ eine Halbmetrik
11. Grenzwerte von Folgen in $\mathcal{L}(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ sind nicht eindeutig:
    $f_n \to f \Rightarrow\ \|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad f = g\ \mu\text{-fast überall} \Rightarrow\ \|f_n - g\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

1.3 Beschränktheit und Vollständigkeit

Im Folgenden seinen $(E,\|.\|)$ und $(F,\|.\|)$ normierte Räume

1. Eine lineare Abbildung $A : E \to F$ heißt **beschränkt**
   :$\Leftrightarrow\ \exists c \in (0,\infty) :\ \forall x \in E : \|Ax\| \le c \cdot \|x\|$
2. Sei $A : E \to F$ linear und $x_0 \in E$. Dann gilt:
   A stetig in $x_0 \Leftrightarrow\ A$ stetig $\Leftrightarrow\ A$ beschränkt
3. Eine Metrik d auf einer Menge X heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge bzgl. d auch bzgl. d konvergiert.
   $(x_n)_n$ Cauchyfolge :$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m,n \ge N :\ d(x_m,x_n) < \varepsilon$
   $x_n \to x :\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \ge N :\ d(x_n,x) < \varepsilon$
4. Ein normierter Raum $(E,\|.\|)$ heißt **Banachraum** :$\Leftrightarrow\ d(x,y) := \|x-y\|$ vollständig
5. $\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ist vollständige Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$, jedoch nicht auf $\mathcal{C}^1[a,b]$
6. $\|.\|_1$ ist vollständige Norm auf $\mathcal{C}^1[a,b]$
7. Seien d_1, d_2 Metriken auf der Menge X
   d_1 ist stärker als d_2 :$\Leftrightarrow\ \forall (x_n)_n \subset X, \forall x \in X :\ (d_1(x_n,x) \to 0 \Rightarrow d_2(x_n,x) \to 0)$
   $\Leftrightarrow\ J_{d_1} \supset J_{d_2}$[1]$\Leftrightarrow\ id : (X,d_2) \to (X,d_2)$ stetig
8. Seien $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf dem linearen Raum E. $d_1(x,y) := \|x-y\|_1,\ d_2(x,y) := \|x-y\|_2$.
   - $\|.\|_1$ heißt **stärker** als $\|.\|_2$:$\Leftrightarrow\ d_1$ stärker als d_2
     $\Leftrightarrow\ id : (E,\|.\|_1) \to (E,\|.\|_2)$ stetig $\Leftrightarrow\ id : (E,\|.\|_1) \to (E,\|.\|_2)$ beschränkt
     $\Leftrightarrow\ \exists c \in (0,\infty) :\ \forall x \in E :\ \|x\|_2 \le c \cdot \|x\|_1$
   - $\|.\|, \|.\|_2$ heißen **äquivalent** :$\Leftrightarrow\ \|.\|_1$ stärker als $\|.\|_2$, $\|.\|_2$ stärker als $\|.\|_1$
     $\Leftrightarrow\ \exists c, c' \in (0,\infty) :\ \forall x \in E :\ \|x\|_2 \le c \cdot \|x\|_1 \wedge \|x\|_1 \le c' \cdot \|x\|_2$
     $\Leftrightarrow\ \exists k, k' \in (0,\infty) :\ \forall 0 \ne x \in E :\ k \le \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \le k'$

1.4 Endlichdimensionale normierte Räume

1. Sei $(E,\|.\|)$ normiert und $x_1,..,x_n$ linear unabhängig in E.
   Dann: $\exists \mu > 0 :\ \forall \alpha \in \mathbb{K}^n\ \|\alpha\|_1 \le \mu \|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\|$
2. Sei $(E,\|.\|)$ normiert und $x_1,..,x_n$ Basis, $A : \mathbb{K}^n \to E, \alpha \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$
   Dann: A bijektiv, $A : (\mathbb{K}^n,\|.\|_1) \to (E,\|.\|)$ stetig, $A^{-1} : (E,\|.\|) \to (\mathbb{K}^n,\|.\|_1)$ stetig

[1] J_d ist die Topologie, die von der Metrik d erzeugt wird

3. Sei E n-dim. VR ber $\mathbb{K}$ mit Normen $\|.\|$, $\|.\|'$. **Dann:** sind $\|.\|$ und $\|.\|'$ äquivalent.

4. $\|.\|_1$ ist vollständige Norm auf $\mathbb{K}^n$.

5. Seien $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ normierte Räume, $A : E \to F$ bijektiv, stetig, $A^{-1} : F \to E$ stetig und $(E, \|.\|)$ vollständig. **Dann:** ist auch $(F, \|.\|)$ vollständig.

6. Sei $(E, \|.\|)$ normiert und n-dimensional ($n \in \mathbb{N}$). **Dann:** ist $(E, \|.\|)$ Banachraum, also vollständig.

7. Sei $(E, \|.\|)$ normiert und $F \subset E$ endlich-dim. Unterraum.
   Dann: ist F eine abgeschlossene Teilmenge von E bzgl. $\|.\|$.

8. Seien $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ normiert, E endlich-dim., $B : E \to F$ linear.
   Dann: ist $B : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|)$ stetig.

1.5 Der Dualraum und Vervollständigungen

1. $\mathfrak{L}(E, F) := \{A : E \to F : \ A \text{ linear und stetig}\}$

2. Seien E, F normiert, $A, B \in \mathfrak{L}(E, F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. **Dann:**
   - $A + B \in \mathfrak{L}(E, F)$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
   - $\alpha A \in \mathfrak{L}(E, F)$, $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
   - $\|.\| : \mathfrak{L}(E, F) \to [0, \infty), A \mapsto \|A\|$ ist eine Norm (**Operatorennorm**)

3. Seien E, F, G normiert, $A \in \mathfrak{L}(E, F), B \in \mathfrak{L}(F, G)$. **Dann:** ist $B \circ A \in \mathfrak{L}(E, G)$, $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

4. Seien E, F normiert und F vollständig. **Dann:** ist $\mathfrak{L}(E, F)$ bzlg. der Operatorennorm vollständig.

5. $E' := \mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$ heißt **Dualraum** von E. $E'' := (E')'$ heißt **Bidualraum** von E.
   $\|.\| : E' \to [0, \infty), f \mapsto \|f\| := \sup_{x \in E: \|x\|=1} |f(x)|$ ist Norm. Der Dualraum ist Banachraum.

6. $A : E \to F$ **Isometrie** $:\Leftrightarrow$ A linear, $\|Ax\| = \|x\| \ \forall x \in E$

7. Sei $x \in E$ fest. $\phi = \phi_x : E' \to \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$, $\Gamma : E \to E'', x \mapsto \phi_x$ ist Isometrie und stets injektiv.

8. $(E, \|.\|)$ heißt **reflexiv** $:\Leftrightarrow$ $\Gamma : E \to E''$ surjektiv

9. Sei $(E, \|.\|)$ reflexiv. **Dann:** ist E vollständig.

10. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

11. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist reflexiv für $p \in (1, \infty)$

12. U heißt **dicht** in F $:\Leftrightarrow$ $\overline{U} = F \Leftrightarrow \ \forall y \in F \ \exists (y_n)_n \subset U : \ y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$

13. Sei E normierter Raum und F Banachraum, $e : E \to F$ Isometrie, $e(E)$ liege dicht in F.
    Dann heißt (F, e) eine **Vervollständigung** von E

14. Jeder normierte Raum lässt sich vervollständigen.

1.5.1 Rieszsches Lemma

Sei $(E, \|.\|)$ normierter Raum, $F \subset E$ linearer, in E abgeschlossener Unterraum, $E \neq F$ und $\eta \in (0, 1)$.
Dann: $\exists x_\eta \in E : \ \|x_\eta\| = 1, \ \forall x \in F : \ \|x - x_\eta\| \geq \eta$

Folgerungen:

1. In jedem unendlich-dim. normierten Raum $(E, \|.\|)$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Insbesondere hat die Folge keine konvergente Teilfolge.

2. Sei $(E, \|.\|)$ unendlich-dim., $\varrho > 0, a \in E$.
   Dann: ist die abgeschlossene Kugel $B_\varrho(a)$ nicht kompakt in E.

2 Hilberträume

2.1 Skalarprodukte

1. Sei E ein $\mathbb{K}$-VR. Ein **Skalarprodukt** (Innenprodukt) auf E ist eine Abbildung $< ., . >: E \times E \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:
   - $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >, \ < \alpha x, y > = \alpha < x, y >$
   - $< x, y > = \overline{< y, x >}$
   - $< x, x > \geq 0, \ [< x, x > = 0 \Rightarrow \ x = 0]$

2. **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\forall x, y \in E : \ | < x, y > | \leq \sqrt{< x, x > \cdot < y, y >}$

3. kanonische Norm: $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$

4. **Parallelogrammgleichung**:
   Für die kanonische Norm $\|.\|$ gilt: $\forall x, y \in E : \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

5. Wenn die Parallelogrammgleichung für eine Norm gilt, so existiert ein inneres Produkt:
   $< x, y > := \begin{cases} \|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 + i\|\frac{x+iy}{2}\|^2 - i\|\frac{x-iy}{2}\|^2 & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

6. **Stetigkeit des Inneren Produkts**:
   $x_n \to x, y_n \to y$ (bzgl. der kanonischen Norm) $\Rightarrow < x_n, y_n > \to < x, y >$

7. Beispiele:
   - $\mathbb{C}^n : \quad < x, y > := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$
   - $l^2 := \{(x_n)_n : \ \forall k \in \mathbb{N} \ x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty\} : \quad < x, y > := \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$
   - $a, b \in \mathbb{R}, a < b : \ L_2(a, b) := \{f : (a, b) \to \mathbb{R} : \ \int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t < \infty\} : \quad < f, g > := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$

8. Ein **Hilbertraum** ist ein vollständiger Innenproduktraum.

2.2 Orthogonalität

1. $x, y \in E:$ x ist **orthogonal** zu $y :\Leftrightarrow <x,y>=0 \Leftrightarrow x \perp y$
2. $M, N \subset E:$ $M \perp N :\Leftrightarrow \forall x \in M, \forall y \in N: <x,y>=0$
3. $M^\perp := \{x \in E: \forall y \in M: <x,y>=0\}$ **orthogonales Komplement**
4. $M \subset E$ **Orthogonalsystem** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M: x \neq y \Rightarrow <x,y>=0$
5. $M \subset E$ **Orthonormalsystem** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M: <x,y>=\delta_{xy}$
6. $M \subset E$ Orthogonalsystem, $0 \notin M \Rightarrow M$ linear unabhängig
7. **Satz des Pythagoras**
   $S = \{u_1, .., u_n\} \subset E$ Orthonormalsystem $\Rightarrow \|\sum_{k=1}^n u_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2$
8. **Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras**
   $S = (u_1, u_2, ..)$ Orthogonalfolge in $E \Rightarrow \exists s \in E: \sum_{k=1}^n u_k = s_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} s$
9. Das Orthogonalsystem $S = \{u_1, u_2, ..\} \subset E$ heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow [u \in E, u \perp S \Rightarrow u = 0]$
10. Beispiele:
    - $\mathbb{R}^n: \{e_k\}_{k=1}^n \qquad l^2: \{e_k\}_{k=1}^\infty$
    - $L^2(-\pi,\pi): \{1, \cos(kt), \sin(kt)\}_{k=1}^\infty$ vollständiges OS, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\}_{k=1}^\infty$ ONS
    - Legendre-Polynome: $P_k(t) = \frac{1}{2^k \cdot k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}(t^2-1)^k$ vollständiges OS
    - Laguere, Tschebyscheff, etc.: $P_k(t) = \sqrt{k+\frac{1}{2}}P_k(t)$
11. **Gaußsche Approximation**: Sei $x \in E, \{u_1, .., u_n\} \subset E$ ONS.
    Dann: $\exists! \alpha^0 \in \mathbb{C}^n: \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 u_k\| = \min_{\alpha \in \mathbb{C}^n} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\|,\ \alpha_i^0 = <x, u_i>$
12. **Besselsche Gleichung**: $\|x - \sum_{k=1}^n <x,u_k> u_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |<x,u_k>|^2$
13. **Besselsche Ungleichung**: $\sum_{k=1}^n |<x,u_k>|^2 \leq \|x\|^2$
14. **Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt**
    $\{x_1, .., x_n\} \subset E \backslash \{0\}$ lin. unabh. $\Rightarrow \exists \{u_1, .., u_n\} \subset E$ ONS: $x_k = \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} u_l, \quad u_k = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} x_l$
    $u_k = \frac{z_k}{\|z_k\|},\ z_k = x_k - \sum_{l=1}^{k-1} <x_k, u_l> u_l$

2.3 Die Allgemeine Approximationsaufgabe

1. K **konvex** $:\Leftrightarrow \forall a, b \in K: \{ta + (1-t)b: 0 \leq t \leq 1\} \subset K$
2. $(E, <,>)$ Innenproduktraum, $K \neq \emptyset$ konvex, (K, d) vollständig (als metr. Raum), $x \in E$
   Dann: $\exists! y_0 \in K: \|x - y_0\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$
3. $(E, <,>)$ IPR, $F \subset E$ lin. UR, $x \in E, y_0 \in F, \|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
   Dann: y_0 eindeutig besstimmt, $(x - y_0) \perp F$
4. Sei $(E, <,>)$ IPR, $F \subset E$ lin. UR, F vollständig. **Dann:** $E = F^\perp \oplus F$

2.4 Der Satz von Fréchet-Riesz

$(E, <,>)$ vollständig $\Leftrightarrow \Psi: E \to E', z \mapsto f_z$ surjektiv $(f_z(x) := <z, x> \forall x \in E)$

Folgerungen:

1. $(E, <,>)$ Hilbertraum, $<f, g>_{E'} := <\Psi^{-1}g, \Psi^{-1}f>_E$ **Dann:** $<,>_{E'}$ ist vollst. Skalarprodukt auf E', die eukl. Norm bzgl. $<,>_{E'}$ ist gleich der Operatorennorm auf E'
2. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

2.5 Orthonormalbasen

1. Sei $(E, <,>)$ Hilbertraum, $(u_n)_n$ Orthonormalfolge in E, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. **Dann:**
   - $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n$ konvergiert in $E \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2$ konvergiert in $\mathbb{R}$
   - $\forall x \in E: x = \sum_{n=1}^\infty <x, u_n> u_n \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |<x,u_n>|^2$
   - $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n \Rightarrow \alpha_n = <x, u_n> \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall b: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv: $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_{\beta(n)} u_{\beta(n)}$
   - $\forall x \in E\ \exists z \in E: z = \sum_{n=1}^\infty <x, u_n> u_n,\ (x - z) \perp \overline{\text{span}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$
2. $(E, <,>)$ Hilbertraum, $S \subset E$ ONS $\Rightarrow \forall x \in E: S_0(x) := \{u \in S: <x,u> \neq 0\}$ abzählbar
3. Sei $(E, <,>)$ Hilbertraum und $S \subset E$ ONS. **Dann:**
   - $\forall x \in E\ \exists z \in E: z = \sum_{u\in S} <x,u> u,\ (x-z) \perp \overline{\text{span} S}$
   - $\forall x \in E: \quad x \in \overline{\text{span} S} \Leftrightarrow x = \sum_{u \in S} <x,u> u \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{x \in S} |<x,u>|^2$
4. $\|x\|^2 = \sum_{u\in S} |<x,u>|^2$ nennt sich **Parselvalsche Gleichung**
5. Sei $(E, <,>)$ Hilbertraum und $S \subset E$ ONS.
   S heißt **Orthonormalbasis** von $E :\Leftrightarrow \forall x \in E: x = \sum_{u\in S} <x,u> u$
6. $(E, <,>)$ Hilbertraum, $S \subset E$ ONS. **Dann:** sind folgende Aussagen äquivalent:
   - S ist Orthonormalbasis von E
   - $\overline{\text{span} S} = E$
   - $\forall x \in E: \|x\|^2 = \sum_{u\in S} |<x,u>|^2$
7. Ein ONS heißt **maximal** $:\Leftrightarrow \forall S': [S' \supset S, S'$ ONS $\Rightarrow S = S'] \Leftrightarrow \forall x \in E: [x \perp S \Rightarrow x = 0]$
8. Sei $(E, <,>)$ Hilbertraum, $S \subset E$ ONS. **Dann:** S ONB von $E \Leftrightarrow S$ maximales ONS von E

2.5.1 Exkurs: Partielle Ordnungen

Sei X eine Menge und $R \subset X \times X$ eine Relation auf X. Wir schreiben $xRy :\Leftrightarrow (x,y) \in R$

(a) R heißt **partielle Ordnung** auf $X :\Leftrightarrow R$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
(b) R partielle Ordnung $\Rightarrow (X, R)$ **partiell geordnete Menge**
(c) $Y \subset X$ heißt **Kette** in $(X, R) :\Leftrightarrow \forall x, y \in Y: [xRy \vee yRx]$

(d) R heißt **totale Ordnung** $:\Leftrightarrow$ X ist Kette in (X,R)

(e) $a \in X$ heißt **obere Schranke** von $Y \subset X$ bzgl. $R :\Leftrightarrow \forall x \in Y: \ xRa$

(f) $a \in Y$ heißt **maximales Element** von $Y \subset X$ bzgl. $R :\Leftrightarrow \forall x \in Y: \ [aRx \Rightarrow x = a]$

(g) (X,R) heißt **induktiv geordnet** $:\Leftrightarrow$ Jede Kette $Y \neq \emptyset$ von (X,R) hat eine obere Schranke

9. **Zornsches Lemma** (Kuratowski-Zorn)
(X,R) partiell geordnete Menge, $X \neq \emptyset$, X induktiv geordnet $\Rightarrow$ X besitzt ein max. Element

10. $(E,<,>)$ Hilbertraum, $S_0 \subset E$ ONS $\Rightarrow \exists S \subset E: \ S$ ONB, $S \supset S_0$

11. Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

12. Seien S_1, S_2 ONB vom Hilbertraum $(E,<,>)$. **Dann:** existiert eine Bijektion $\alpha: S_1 \to S_2$

13. Ein metrischer Raum (X,d) heißt **separabel** $:\Leftrightarrow \exists D \subset X: \ X$ abzählbar, $\overline{D} = X$
$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X \ \exists y \in D: \ d(x,y) < \varepsilon$

14. Sei $(E,<,>)$ Hilbertraum. **Dann:**
E besitzt eine abzählbare ONB $\Leftrightarrow$ E separabel mit Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$

2.6 Der Satz von Radon-Mikodyn

1. Seien μ, ν Maße auf der σ-Algebra $\mathfrak{A}$.
ν heißt **absolut stetig** bzgl. $\mu :\Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{A}: \ [\mu A = 0 \Rightarrow \ \nu A = 0] \Leftrightarrow \ \nu \ll \mu$

2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ Maßraum, $\varrho: \Omega \to [0,\infty]$ $\mathfrak{A}$-meßbar, $\forall A \in \mathfrak{A}: \nu A = \int_A \varrho \mathrm{d}\mu = \int_X 1_A \varrho \mathrm{d}\mu, \ \nu A \in [0,\infty]$
$\nu: \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ ist Maß auf $\mathfrak{A}$, ϱ die Dichte von ν bzgl. μ. Es gilt: $\nu \ll \mu$

3. ν hat eine Dichte bzgl. $\mu \Rightarrow \ \nu \ll \mu$

4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ messbarer Raum, μ, ν Maße auf $\mathfrak{A}$ mit $\nu \ll \mu$ **Dann:** $\exists \varrho: \Omega \to [0,1]$ $\mathfrak{A}$-meßbar:
$\nu A = \int_A \varrho \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_A \varrho \mathrm{d}\mu \ \forall A \in \mathfrak{A}, \ \forall f: \Omega \to [0,\infty]$ $\mathfrak{A}$-meßbar: $\int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \varrho \mathrm{d}\mu$

5. **Satz von Radon-Mikodyn**
$(\Omega, \mathfrak{A})$ messbarer Raum, μ, ν σ-endliche Maße auf $\mathfrak{A}$.
Dann: $\exists \varrho: \mathfrak{A} \to [0,\infty]: \ \forall A \in \mathfrak{A}: \ \nu(A) = \int_A \varrho \mathrm{d}\mu, \ \int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \int f \varrho \mathrm{d}\mu \ \forall f \geq 0$ $\mathfrak{A}$-messbar

2.7 Der Bairesche Kategoriensatz

1. $A \subset E$ heißt von **1. Kategorie** $:\Leftrightarrow \exists (F_n)_{n\in\mathbb{N}}: \ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}, \ F_n$ abgeschlossen

2. $A \subset E$ heißt von **2. Kategorie** $:\Leftrightarrow$ A ist nicht von 1. Kategorie

3. **Satz von Cantor**
(E,d) vollst. metr. Raum, $(F_n)_n: \ F_{n+1} \subset F_n, F_n \neq \emptyset$ abgeschlossen in $E \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{diam}(F_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Dann: $\exists x \in E: \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$

4. $F \subset E$, F abgeschlossen, $\mathrm{Int}(F) \neq \emptyset$
Dann: $\forall K$, K abgeschlossene Kugel $\exists K'$ abg. Kugel: $K' \subset K, K' \cap F = \emptyset$

5. **Bairescher Kategoriensatz**
(E,d) vollständig, $G \subset E$ offen, $\emptyset \neq G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, F_n$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N}$
Dann: $\exists k \in \mathbb{N}: \ \mathrm{Int} F_k = \emptyset$

6. Sei $(E, \|.\|)$ Banachraum, $dim_{\mathbb{K}} E = \infty$.
Dann: ist jede Basis von E (im Sinne der Lin. Alg.) überabzählbar.

7. Sei E separabler Hilertraum, $\dim_{\mathbb{K}} E = \infty$.
Dann: $\exists$ abzählbare Hilbertraumbasis (aber keine abzählbare Basis im Sinne der Lin. Alg.)

2.8 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

1. $f_i: E \to \mathbb{R}: \ (f_i)_{i\in I}$ heißt **punktweise nach oben beschränkt**
$:\Leftrightarrow \ \forall x \in E \ \exists M_x \in [0,\infty): \ \sup_{i\in I} |f_i(x)| \leq M_x$

2. **Satz von Osgood**
Sei (E,d) vollständig, I Indexmenge, $\forall i \in I: \ f_i: E \to \mathbb{R}$ stetig, $(f_i)_{i\in I}$ pktw. nach oben beschränkt. **Dann:** $\exists K$ abg. Kugel: $K \subset E, \exists M \in [0,\infty): \ \forall i \in I, \forall x \in K: \ |f_i(x)| \leq M$

3. **Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**
Seien E,F normiert, E vollständig, $(A_i)_{i\in I}$ Familie aus $\mathfrak{L}(E,F)$ mit $\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty \ \forall x \in E$.
Dann: $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$

4. Seien E,F normiert, E vollständig, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{L}(E,F), \forall x: \ (A_n(x))_n$ konvergent in F,
$A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x)$. **Dann:** $A \in \mathfrak{L}(E,F)$, insb. A stetig, $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$

2.9 Der Satz von Banach-Steinhaus

1. Seien E,F Banachräume, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{L}(E,F)$. **Dann:**
$(A_n)_n$ pkt.w. konvergent $\Leftrightarrow$ $(\|A_n\|)_n$ beschränkt, $\exists M \subset E: \ \overline{M} = E, \ \forall x \in M: \ (A_n x)_n$ konvergent

2. Seien E,F,G normiert, F vollständig, $(A_n)_n$ aus $\mathfrak{L}(E,F)$ pkt.w. konvergent gegen $A: E \to F$,
$(B_n)_n$ aus $\mathfrak{L}(F,G)$ pkt.w. konvergent gegen $B: F \to G$
Dann: $B_n \circ A_n$ pkt.w. konvergent gegen $B \circ A$

2.10 Das Cantorsche Diagonalverfahren

Sei X eine Menge, $\forall k \in \mathbb{N}: \ (x_{k,n})_n \subset X: \ \forall k \in \mathbb{N}: \ (x_{k+1,n})_n \subset (x_{k,n})_n, \ y_n := x_{n,n} \ \forall n \in \mathbb{N}$
Dann: $\forall k \in \mathbb{N} \ (y_n)_{n\geq k} \subset (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$

2.11 Schwache Konvergenz in Hilberträumen

1. Sei $(E, \|.\|)$ normiert und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E, x \in E$
$(x_n)_n$ **konvergiert schwach** gegen $x :\Leftrightarrow \ \forall f \in E': \ f(x_n) \to f(x)$ in $\mathbb{K} \Leftrightarrow \ x_n \rightharpoonup x$
Die übliche Konvergenz heißt oft **starke Konvergenz**.

2. Ist $(E, \|.\|)$ Hilbertraum, so hat jedes $f \in E'$ die Darstellung $f(x) =< x, z > \forall x \in E$, wobei $z = z_f \in E$. **Daher:** $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \ \forall z \in E: < x_n, z > \to < x, z >$

3. **Schwacher Bolzano-Weierstraß in Hilberträumen**
   Sei $(E, \|.\|)$ Hilbertraum, $(x_n)_n$ beschränkte Folge aus E.
   Dann: hat $(x_n)_n$ eine schwach konvergente Teilfolge.

2.12 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

1. Sei E $\mathbb{C}$-linearer Raum, $f : E \to \mathbb{C}, f_1(x) := \Re(f(x)), f_2(x) := \Im(f(x))$. **Dann:**
   f $\mathbb{C}$-linear $\Leftrightarrow$ f_1 $\mathbb{R}$-linear, $\forall x \in E : \; f_2(x) = -f_1(ix)$
2. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $p : E \to \mathbb{R}$
   - p heißt **subadditiv** $:\Leftrightarrow$ $p(x + y) \le p(x) + p(y) \; \forall x, y \in E$
   - p heißt **positiv homogen** $:\Leftrightarrow$ $p(\lambda x) = \lambda p(x) \; \forall \lambda \in [0, \infty), \forall x \in E$
   - p heißt **homogen** $:\Leftrightarrow$ $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) \; \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E$
   - p heißt **Halbnorm** $:\Leftrightarrow$ p subadditiv und homogen
3. **Satz von Hahn-Banach: Reeller Fall**
   Sei E $\mathbb{R}$-VR, $p : E \to \mathbb{R}$ subadditiv und positiv homogen, $F \subset E$ linearer UR, $f : F \to \mathbb{R}$ linear, $f \le p$. **Dann:** $\exists g : E \to \mathbb{R}$ linear: $g_{|F} = f, \; g \le p$
4. **Satz von Hahn-Banach: Komplexer Fall**
   Sei E $\mathbb{C}$-VR, $F \subset E$ $\mathbb{C}$-linearer UR, $f : F \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, $p : E \to \mathbb{R}$ subadditiv und positiv homogen, $\Re(f) \le p$. **Dann:** $\exists g : E \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear: $g_{|F} = f, \Re(g) \le p$
5. **Satz von Hahn-Banach: mit Halbnorm**
   Sei E $\mathbb{K}$-VR, $p : E \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $F \subset E$ $\mathbb{K}$-lin. UR, $f : F \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-linear, $|f(x)| \le p(x) \; \forall x \in F$
   Dann: $\exists g : E \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-linear: $g_{|F} = f, |g(x)| \le p(x) \forall x \in E$
6. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}$, $F \subset E$ $\mathbb{K}$-linearer UR, $f : F \to \mathbb{K}$ linear stetig.
   Dann: $\exists g : E \to \mathbb{K}$ linear stetig: $g_{|F} = f, \|g\|_{\mathfrak{L}(E,\mathbb{K})} = \|f\|_{\mathfrak{L}(F,\mathbb{K})}$
7. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}$, $0 \ne x_0 \in E, \beta \in \mathbb{K}$.
   Dann: $\exists g : E \to \mathbb{K}$ linear stetig, $g(x_0) = \beta \|x_0\|, \|g\| = |\beta|$
8. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}$. **Dann:** $\forall x \in E : \; \|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \le 1} |f(x)| = \max_{f \in E', \|f\| \le 1} |f(x)|$
9. $C \subset E$ heißt **konvexe Nullumgebung** $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \; K_\varepsilon(0) \subset C$
10. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}$, $C \subset E$ konvexe Nullumgebung,
    $\forall x \in E : \; P(x) := \{\alpha \in (0, \infty) : \; x \in \alpha C\}, \; p(x) := \begin{cases} \inf P(x) & P(x) \ne \emptyset \\ \infty & P(x) = \emptyset \end{cases}$ **Dann:**
    - $\forall x \in E : \; p(x) \in [0, \infty), \; p$ subadditiv, positiv homogen, $p(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$
    - C offen $\Rightarrow$ $C = \{x : \; p(x) < 1\}$
11. $C \subset E$ konvex, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. **Dann:** $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta) C$
12. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}, \emptyset \ne C \subset E$ offen, konvex, $x_0 \notin C$.
    Dann: $\exists 0 \ne f \in E' : \; \Re(f(x)) \le \Re(f(x_0)) \; \forall x \in C$

13. **Satz von Hahn-Banach: 1. geometrische Fassung**
    Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}, A, B \subset E$ nichtleer, konvex, $A \cap B = \emptyset, A$ offen.
    Dann: $\exists 0 \ne f \in E' : \; \Re(f(x)) < Re(f(y)) \; \forall x \in A, \forall y \in B$
14. **Satz von Hahn-Banach: 2. geometrische Fassung**
    Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}, A, B \subset E, A \cap B = \emptyset, A$ abgeschlossen, B kompakt.
    Dann: $\exists \varepsilon > 0, \exists 0 \ne f \in E' : \; \Re(f(x)) + \varepsilon\|f\| \le \Re(f(y)) - \varepsilon\|f\| \; \forall x \in A, \forall y \in B$
    $\Rightarrow \; \sup_{x \in A} \Re(f(x)) + \varepsilon\|f\| \le \inf_{y \in B} \Re(f(y)) - \varepsilon\|f\|$
    $\Rightarrow \; \exists \alpha \in \mathbb{K} : \; \Re(f(x)) \le \alpha - \varepsilon\|f\| < \alpha < \alpha + \varepsilon\|f\| \le \Re(f(y))$
15. Sei $(E, \|.\|)$ normiert über $\mathbb{K}, \; F \subset E$ $\mathbb{K}$-lin. UR.
    Dann: F liegt dicht in $E \Leftrightarrow \forall f \in E' : \; \left[f_{|F} = 0 \Rightarrow f = 0\right]$

3 Das Prinzip der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen

1. $A : E \to F$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow$ $[G \subset E$ offen $\Rightarrow$ $A(G)$ offen$]$
2. **Der Satz von Banach-Schauder**
   Seien E, F Banachräume über $\mathbb{K}, A : E \to F$ $\mathbb{K}$-linear, stetig, surjektiv. **Dann:** A offen
3. **Der Satz von der stetigen Inversen**
   Seien E, F Banachräume über $\mathbb{K}, A : E \to F$ $\mathbb{K}$-linear, stetig bijektiv.
   Dann: ist $A^{-1} : F \to E$ stetig
4. $A : E \to F : \; G_A := \{(x, Ax) : \; x \in E\} \subset E \times F$
   - E, F Banachräume $\Rightarrow$ $E \times F$ Banachraum: $\|(x, y)\|_{E \times F} := \|x\|_E + \|y\|_F$
   - A $\mathbb{K}$-linear $\Rightarrow$ G_A $\mathbb{K}$-lin. UR von $E \times F$
   - A stetig $\Rightarrow$ G_A abgeschlossen
5. **Der Satz vom abgeschlossenen Graphen**
   Seien E, F Banachräume über $\mathbb{K}, A : E \to F$ $\mathbb{K}$-linear, G_A abgeschlossen in $E \times F$. **Dann:** ist $A : E \to F$ stetig
6. Sei $(E, <, >)$ Inneproduktraum über $\mathbb{K}, D \subset E$ $\mathbb{K}$-lin. UR, $A : D \to E$ $\mathbb{K}$-linear.
   A heißt **symmetrisch** $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in D : < Ax, y > = < x, Ay >$
7. **Satz von Hellinger-Toeplitz**
   Sei $(E, \|.\|)$ Hilbertraum, $A : E \to E$ $\mathbb{K}$-linear, symmetrisch. **Dann:** ist A stetig
8. **Satz von der stetigen Projektion**
   Sei $(E, \|.\|)$ Banachraum, $E_1, E_2 \subset E$ abgeschlossene, $\mathbb{K}$-lin. UR mit
   $E = E_1 \oplus E_2 \; [E \ni x = x_1 + x_2 (x_i \in E_i)], p_1 : E \to E_1, x \mapsto x_1, \; p_2 : E \mapsto E_2 x \to x_2$
   Dann: sind p_1, p_2 $\mathbb{K}$-linear und stetig

4 Der Satz von Arzelà-Ascoli

1. Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.
   - A heißt (überdeckungs)**kompakt** in X :$\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von A hat eine endliche Teilüberdeckung
   - A heißt **folgenkompakt** in X :$\Leftrightarrow$ Jede Folge in A hat eine in A konvergente Teilfolge
   - A heißt **praekompakt** bzw. **total beschränkt** in X :$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{x_1, .., x_n\} \subset X :\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_\varepsilon(x_i) = \{x \in X :\ d(x, x_i) < \varepsilon\} \quad (n \in \mathbb{N})$
2. Sei (X, d) metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$. **Dann:** sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) A ist kompakt in X.
   (b) A ist folgenkompakt in X.
   (c) A ist praekompakt in X und vollständig.
3. Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$. **Dann:**
   $\overline{A}$ kompakt in $X \Leftrightarrow$ Jede Folge aus A hat eine gegen $x \in X$ konvergente Teilfolge
4. Sei (X, d) vollständiger, metrischer Raum, $A \subset X$.
   Dann: A praekompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ kompakt
5. Sei (X, d) metrischer Raum: $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m) := \{f : X \to \mathbb{R}^m :\ f \text{ stetig}\}$.
   $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m \Rightarrow\ \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} < \infty$ ist Norm auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$
   Es gilt: $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m), \|.\|)$ ist vollständig
6. Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$.
   - A heißt **beschränkt** :$\Leftrightarrow$ $\exists c \in [0, \infty) :\ \forall f \in A :\ \|f\| \leq c \Leftrightarrow \sup_{f \in A} \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty$
   - A heißt **gleichgradig gleichmäßig stetig** :$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) :\ \forall f \in A, \forall x, y \in X :\ [d(x, y) < \delta \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon]$
7. **Der Satz von Arzelà-Ascoli**
   Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$. **Dann:**
   A praekompakt $\Leftrightarrow$ A beschränkt in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$, gleichgradig gleichmäßig stetig

5 Differentialgleichungen

1. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$.
   f heißt **lokal Lipschitz-stetig** in D (bzgl. der 2. Variable) :$\Leftrightarrow$ $\forall (t_0, x_0) \in D\ \exists V$ offen:
   $(t_0, x_0) \in V \subset D, \exists L_V \in [0, \infty) :\ \forall t, x, x', (t, x), (t, x') \in V :\ \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L_V \|x - x'\|$
2. **Satz von Picard-Lindelöf** (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)
   Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der 2. Variable. **Dann:** $\forall (t_0, x_0) \in D\ \exists \delta = \delta(t_0, x_0) > 0, \exists! \varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar:
   $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) :\ (t, \varphi(t)) \in D, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \varphi(t_0) = x_0$
   d.h. $x(t) := \varphi(t)\ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ist eine "lokale" Lösung des AWP $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

3. **Satz von Peano**
   Seien $a < b \in \mathbb{R},\ f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ stetig, beschränkt durch $M \in [0, \infty), \eta \in \mathbb{R}^n$.
   Dann: $\exists x : [a, b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto x(t) :\ x$ differenzierbar, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in [a, b], x(a) = \eta$

6 Symmetrsiche, kompakte Operatoren und der Spektralsatz

1. Sei $(E, <,>)$ Innenproduktraum über $\mathbb{K}, D \subset E$ $\mathbb{K}$-lin. UR, $A : D \to E$ linear.
   A heißt **symmetrisch** :$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in D : < Ax, y > = < x, Ay >$
2. $A : D \to E,\ \mathbb{K} = \mathbb{C}, < Ax, x > \in \mathbb{R}\ \forall x \in D$. **Dann:** A symmetrisch
3. Sei $(E, <,>)$ IPR, $E \neq \emptyset, A : E \to E$ linear, stetig, symmetrisch.
   Dann: $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} | < Ax, x > |$
4. Seien E, F normiert über $\mathbb{K}, A : E \to F$ linear.
   A heißt **kompakt** :$\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \subset E :\ [(x_n)_n$ beschränkt $\Rightarrow\ (Ax_n)_n$ hat eine in F konvergente Teilfolge$]$
5. Seien E, F normiert über $\mathbb{K}, A : E \to F$ linear kompakt. **Dann:** A stetig.
6. Sei E ein linearer Raum über $\mathbb{K}, D \subset E$ lin. UR, $A : D \to E$ linear.
   $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times (D \backslash \{0\})$ heißt **Eigenwert-Eigenvektor-Paar** von A :$\Leftrightarrow$ $Au = \lambda u$
7. Sei $(E, <,>)$ IPR über $\mathbb{K}, D \subset E$ lin. UR, $A : D \to E$ linear, symmetrisch.
   Dann: ist jeder EW von A reell und EV zu versch. EW sind orthogonal zueinander.
8. Sei λ Eigenwert von $A : D \to E$.
   Dann heißt $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A))$ **geometrische Vielfachheit** von λ.
9. Sei $(E, <,>)$ IPR, $F \subset E$ lin. UR, $A : E \to E$ linear, symmetrisch, $A(F) \subset F$. **Dann:**
   - $A(F^\perp) \subset F^\perp$
   - A kompakt $\Rightarrow\ A_{|F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ kompakt
10. Sei $(E, <,>)$ IPR, $0 \neq A : E \to E$ linear, symmetrisch, kompakt. **Dann:**
    - $\exists u \in E :\ \|u\| = 1, | < Au, u > | = \sup_{x \in E, \|x\|=1} | < Ax, x > | = \|A\|$
    - $\exists \mu \in \{\|A\|, -\|A\|\} :\ Au = \mu u$
11. **Der Spektralsatz für lineare, symmetrische, kompakte Operatoren**
    Sei $(E, <,>)$ IPR, $0 \neq A : E \to E$ linear, symmetrisch, kompakt. **Dann:** gibt es zwei Möglichkeiten:
    (a) $\exists m, \exists u_1, .., u_m \in E, \mu_1, .., \mu_m \in \mathbb{R} :\ u_i$ orthonormal, $|\mu_k| \leq |\mu_{k-1}|, Au_k = \mu_k u_k\ \forall k$,
    $Ax = \sum_{k=1}^{m} \mu_k < x, u_k > u_k\ \forall x \in E$
    (b) $\exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Orthonormalfolge, $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} :\ |\mu_k| \leq |\mu_{k-1}|, Au_k = \mu_k u_k\ \forall k$,
    $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < x, u_k > u_k\ \forall x \in E$

    In beiden Fällen gilt: $\{\mu_k\} = \{\mu :\ \mu \neq 0, \mu \text{ EW von } A\}$,
    $\forall \mu \neq 0$ EW von A: geom. Vielfachheit von $\mu = |\{k :\ \mu_k = \mu\}|$