Sommerakademie La Villa 29.08.2004 - 11.09.2004

Graphen ohne kurze Kreise und großer Färbungszahl

Arbeitsgruppe 4: “Probabilistische Methoden”

Vortrag 9

gehalten von Sara (Elisabeth) Adams

Quellen:
Stefanie Gerke: “Random Graphs”, Lecture Notes ETH Zürich, 2004
M. Aigner, G. M. Ziegler: “Proofs from THE BOOK”, Springer, 2001

Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

- **Clique**: $C \subset V(G): \ a, b \in C \Rightarrow \ (a, b) \in E(G)$ [clique]
- **Cliquenzahl** $\omega(G)$: maximale Größe einer Clique von G [clique number]

Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

- **Clique**: $C \subset V(G): \ a, b \in C \Rightarrow \ (a,b) \in E(G)$ [clique]
- **Cliquenzahl** $\omega(G)$: maximale Größe einer Clique von G [clique number]
- **stabile Menge**: $S \subset V(G): \ a, b \in S \Rightarrow \ (a,b) \notin E(G)$ [stable set]
- $\alpha(G)$: maximale Größe einer stabilen Menge [stable set number]

Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

- **Clique**: $C \subset V(G): \; a, b \in C \Rightarrow \; (a, b) \in E(G)$ [clique]
- **Cliquenzahl** $\omega(G)$: maximale Größe einer Clique von G [clique number]
- **stabile Menge**: $S \subset V(G): \; a, b \in S \Rightarrow \; (a, b) \notin E(G)$ [stable set]
- $\alpha(G)$: maximale Größe einer stabilen Menge [stable set number]
- **zulässige Färbung**: je zwei Endpunkte einer Kante sind verschieden gefärbt
- **Färbungszahl** $\chi(G)$: kleinst mögliche Anzahl an verschiedenen Farben, um einen Graphen zulässig zu färben [chromatic number]

Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

- **Clique**: $C \subset V(G) : \; a, b \in C \Rightarrow \; (a, b) \in E(G)$ [clique]
- **Cliquenzahl** $\omega(G)$: maximale Größe einer Clique von G [clique number]
- **stabile Menge**: $S \subset V(G) : \; a, b \in S \Rightarrow \; (a, b) \notin E(G)$ [stable set]
- $\alpha(G)$: maximale Größe einer stabilen Menge [stable set number]
- **zulässige Färbung**: je zwei Endpunkte einer Kante sind verschieden gefärbt
- **Färbungszahl** $\chi(G)$: kleinst mögliche Anzahl an verschiedenen Farben, um einen Graphen zulässig zu färben [chromatic number]
- **Taillenweite** $\gamma(G)$: Größe des kleinsten Kreises von G [girth]

Einfache Vorüberlegungen

1. Jede Farbe induziert eine stabile Gruppe: $\Rightarrow \ \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$

Einfache Vorüberlegungen

1. Jede Farbe induziert eine stabile Gruppe: $\Rightarrow\ \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$
2. Jeder Knoten einer Clique muss anders gefärbt sein: $\Rightarrow\ \chi(G) \geq \omega(G)$

Einfache Vorüberlegungen

1. Jede Farbe induziert eine stabile Gruppe: $\Rightarrow\ \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$
2. Jeder Knoten einer Clique muss anders gefärbt sein: $\Rightarrow\ \chi(G) \geq \omega(G)$

Theorem

Für jedes k, l existiert ein Graph, dessen Färbungszahl $\chi(G) \geq k$ ist und dessen kleinster Kreis mindestens die Länge l hat, also $\gamma(G) \geq l$.

$$\boxed{k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow\ \exists\, G:\ \chi(G) \geq k, \gamma(G) \geq l}$$

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

- Wähle p "klein" $\Rightarrow$ wahrscheinlich keine kurzen Kreise

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

- Wähle p "klein" $\Rightarrow$ wahrscheinlich keine kurzen Kreise
- Wähle p "groß" $\Rightarrow$ wahrscheinlich nur kleine stabile Mengen

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

- Wähle p "klein" $\Rightarrow$ wahrscheinlich keine kurzen Kreise
- Wähle p "groß" $\Rightarrow$ wahrscheinlich nur kleine stabile Mengen

Problematik:
p kann i.A. nicht so gewählt werden, dass beide Bedingungen erfüllt sind.

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

- Wähle p "klein" $\Rightarrow$ wahrscheinlich keine kurzen Kreise
- Wähle p "groß" $\Rightarrow$ wahrscheinlich nur kleine stabile Mengen

Problematik:
p kann i.A. nicht so gewählt werden, dass beide Bedingungen erfüllt sind.

Ausweg:

- Beweise Existenz eines Hilfsgraphen

Brainstorming

Betrachte Zufallsgraphen mit Kantenwahrscheinlichkeit p:

- Wähle p "klein" $\Rightarrow$ wahrscheinlich keine kurzen Kreise
- Wähle p "groß" $\Rightarrow$ wahrscheinlich nur kleine stabile Mengen

Problematik:
p kann i.A. nicht so gewählt werden, dass beide Bedingungen erfüllt sind.

Ausweg:

- Beweise Existenz eines Hilfsgraphen
- Modifiziere diesen Hilfsgraphen

Aufbau des Beweises

Teil I:
Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph mindestens $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge $\leq l$ besitzt

Aufbau des Beweises

Teil I:
Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph mindestens $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge $\leq l$ besitzt

Teil II:
Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph eine stabile Menge S besitzt mit $|S| \geq a$

Aufbau des Beweises

Teil I:
Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph mindestens $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge $\leq l$ besitzt

Teil II:
Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph eine stabile Menge S besitzt mit $|S| \geq a$

Teil III:
Abschluss des Beweises

I. Erwartungswert der Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$

Sei n die Anzahl der Knoten und $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Kante. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} i! \cdot p^i$$

$\binom{n}{i}$	:	Wahl der i Knoten
$i!$	:	Anordnen der i Knoten
p^i	:	Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auftreten

I. Erwartungswert der Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$

Sei n die Anzahl der Knoten und $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Kante.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \cdot p^i$$

$\binom{n}{i}$	:	Wahl der i Knoten
$i!$	:	Anordnen der i Knoten
p^i	:	Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auftreten
$\frac{1}{i}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Startknoten
$\frac{1}{2}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Orientierung

I. Erwartungswert der Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$

Sei n die Anzahl der Knoten und $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Kante.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \cdot p^i = \sum_{i=3}^{l} \frac{n!}{(n-i)! \cdot n^i} \cdot \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i}$$

$\binom{n}{i}$	:	Wahl der i Knoten
$i!$	:	Anordnen der i Knoten
p^i	:	Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auftreten
$\frac{1}{i}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Startknoten
$\frac{1}{2}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Orientierung

I. Erwartungswert der Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$

Sei n die Anzahl der Knoten und $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Kante. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \cdot p^i = \sum_{i=3}^{l} \frac{n!}{(n-i)! \cdot n^i} \cdot \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i} \leq \sum_{i=3}^{l} \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i}$$

$\binom{n}{i}$	:	Wahl der i Knoten
$i!$	:	Anordnen der i Knoten
p^i	:	Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auftreten
$\frac{1}{i}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Startknoten
$\frac{1}{2}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Orientierung

I. Erwartungswert der Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$

Sei n die Anzahl der Knoten und $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Kante.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \cdot p^i = \sum_{i=3}^{l} \frac{n!}{(n-i)! \cdot n^i} \cdot \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i} \leq \sum_{i=3}^{l} \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i} \leq l n^{\frac{l}{l+1}}$$

$\binom{n}{i}$	:	Wahl der i Knoten
$i!$	:	Anordnen der i Knoten
p^i	:	Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auftreten
$\frac{1}{i}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Startknoten
$\frac{1}{2}$	:	Mehrfachzählung auf Grund der Orientierung

I. Eine Abschätzung

Mit Markovs Ungleichung

$$\mathbb{P}[|X| \geq \tau] \leq \frac{E[|X|^m]}{\tau^m}$$

I. Eine Abschätzung

Mit Markovs Ungleichung

$$\mathbb{P}[|X| \geq \tau] \leq \frac{E[|X|^m]}{\tau^m}$$

für $\tau = \frac{n}{2}$ und $m = 1$ folgt

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] \leq 2ln^{\frac{l}{l+1}-1} = 2ln^{-\frac{1}{l+1}}$$

I. Eine Abschätzung

Mit Markovs Ungleichung

$$\mathbb{P}[|X| \geq \tau] \leq \frac{E[|X|^m]}{\tau^m}$$

für $\tau = \frac{n}{2}$ und $m = 1$ folgt

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] \leq 2ln^{\frac{l}{l+1}-1} = 2ln^{-\frac{1}{l+1}}$$

Insbesondere gilt für ausreichend großes n

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \ \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow \ n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow \ ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \ \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow \ n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow \ ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$

Somit:

$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}}$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$

Somit:

$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \leq (ne^{-p\frac{a-1}{2}})^a$

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$

Somit:

$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \leq (ne^{-p\frac{a-1}{2}})^a \leq n^{-\frac{a}{2}}$,

II. Stabile Mengen

- $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge mit a Knoten stabil ist: $(1-p)^{\binom{a}{2}}$

Zwei Vorüberlegungen:

$1 + x \leq e^x \Rightarrow \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$

$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$

Somit:

$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \leq (ne^{-p\frac{a-1}{2}})^a \leq n^{-\frac{a}{2}}$,

Es gilt also für ausreichend großes n:

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] < \frac{1}{2}$$

III. Folgerung

Für ausreichend großes n gilt also:

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] < \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$$

III. Folgerung

Für ausreichend großes n gilt also:

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] < \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ Graph mit n Knoten:

- $\alpha(G) \leq 3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1$
- enthält weniger als $\frac{n}{2}$ Kreise der Länge $\leq l$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1}$$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1} = \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + \frac{2}{n^{\frac{l}{l+1}}}}$$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1} = \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + \frac{2}{n^{\frac{l}{l+1}}}} > \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + 2}$$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1} = \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + \frac{2}{n^{\frac{l}{l+1}}}} > \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + 2}$$

n ausreichend groß $\Rightarrow \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + 2} > k$

III. Abschluss des Beweises

Sei G' Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt.

- $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G)$

Aus den Vorüberlegungen: $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1} = \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + \frac{2}{n^{\frac{l}{l+1}}}} > \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + 2}$$

n ausreichend groß $\Rightarrow$ $\frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6 \ln n + 2} > k$ $\square$