Sommerakademie La Villa 29.08.2004 - 11.09.2004

Graphen ohne kurze Kreise und großer Färbungszahl

Arbeitsgruppe "Probabilistische Methoden"

Vortrag 9

gehalten von Sara (Elisabeth) Adams

Quellen:
Stefanie Gerke: "Random Graphs", Lecture Notes ETH Zürich, 2004
M. Aigner, G. M. Ziegler: "Proofs from THE BOOK", Springer, 2001

1 Begriffe

Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen:

- Eine **Clique** ist eine Knotenmenge $C \subset V(G)$, der einen vollständigen Graphen induziert, d.h. es gilt: $a, b \in C \Rightarrow (a, b) \in E(G)$
- Mit der Cliquenzahl $\omega(G)$ bezeichnet man die maximale Größe einer Clique von G. [clique number]
- Eine **stabile Menge** ist eine Teilmenge S der Knotenmenge $V(G)$, so dass keine Kante zwischen zwei Knoten der Teilmenge verläuft, d.h. $a, b \in S \Rightarrow (a, b) \notin E(G)$
- Mit $\alpha(G)$ bezeichnet man die maximale Größe einer stabilen Menge. [stable set number]
- Eine **Färbung** ist **zulässig**, falls je zwei Endpunkte einer Kante verschieden gefärbt sind.
- Mit $\chi(G)$ bezeichnet man die kleinst mögliche Anzahl an verschiedenen Farben, um einen Graphen zulässig zu färben. [chromatic number]
- Die **Taillenweite** $\gamma(G)$ eines Graphen ist die Grösse des kleinsten Kreises von G [girth].

2 Einfache Vorüberlegungen

1. Jede Farbe induziert eine stabile Gruppe. $\Rightarrow \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$
2. Jeder Knoten einer Clique muss anders gefärbt sein. $\Rightarrow \chi(G) \geq \omega(G)$

3 Theorem

Für jedes k, l existiert ein Graph, dessen Färbungszahl $\chi(G) \geq k$ ist und dessen kleinster Kreis mindestens die Länge l hat, also $\gamma(G) \geq l$.

$$\boxed{\forall k, l \in \mathbb{N}\ \exists\, G :\ \chi(G) \geq k, \gamma(G) \geq l}$$

4 Beweis

Sei V eine Knotenmenge mit $|V| = n$. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $G_{n,p}$ aller Graphen auf dieser Knotenmenge, wobei die einzelnen Kanten mit Wahrscheinlichkeit p auftreten.
Fasst man die Auswahl der Kanten als ein Bernoulli-Experiment auf, so kann man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Graphen einfach berechnen. Für einen Graphen H mit $|E(H)| = m$ folgt demnach

$$\mathbb{P}[H] = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Sei $p := n^{-\frac{l}{l+1}}$ und X bezeichne die Anzahl der Kreise mit Länge $\leq l$.
Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten Knoten für einen Kreis der Länge i zu wählen und $i!$ Möglichkeiten diese anzuordnen. Bei dieser Zählung werden die Kreise jedoch $2i$ mal berücksichtigt, da es i Startpunkte gibt und die Orientierung berücksichtigt wurde (Man kann immer den nächsten rechten Knoten oder den nächsten linken Knoten wählen. $\Rightarrow$ "gerichtete Graphen"). Durch p^i erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass der Kreis tatsächlichk i Kanten hat.

Da der Erwartungswert Linearitätseigenschaften aufweist, gilt demnach:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l} \binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \cdot p^i = \sum_{i=3}^{l} \frac{n!}{(n-i)! \cdot n^i} \cdot \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i} \leq \sum_{i=3}^{l} \frac{n^{\frac{i}{l+1}}}{2i} \leq l n^{\frac{l}{l+1}}$$

Mit Markovs Ungleichung

$$\mathbb{P}[|X| \geq \tau] \leq \frac{E[|X|^m]}{\tau^m}$$

für $\tau = \frac{n}{2}$ und $m = 1$ folgt

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] \leq 2ln^{\frac{l}{l+1}-1} = 2ln^{-\frac{1}{l+1}}$$

Insbesondere gilt für ausreichend großes n

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Menge der Größe a unabhängig ist, beträgt $(1-p)^{\binom{a}{2}}$, da $\binom{a}{2}$ Kanten auftreten können. Daher gilt für $a := \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil + 1$

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \leq (ne^{-p\frac{a-1}{2}})^a \leq n^{-\frac{a}{2}},$$

denn es gilt:

$$1 + x \leq e^x \Rightarrow \binom{n}{a} \cdot (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a \cdot (e^{-p})^{\frac{a(a-1)}{2}}$$

$$p(a-1) \geq p \cdot \frac{3}{p} \ln(n) = 3\ln(n) \Rightarrow \; n^3 = e^{3\ln(n)} \leq e^{p(a-1)} \Rightarrow \; ne^{-p\frac{a-1}{2}} \leq n^{-\frac{1}{2}}$$

Es gilt also für ausreichend großes n:

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{n,p}) \geq a] < \frac{1}{2}$$

Folglich gibt es für ausreichend großes n einen Graphen G mit n Knoten, $\alpha(G) \leq 3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1$ und weniger als $\frac{n}{2}$ Kreisen.
Sei G' der Graph, der dadurch entsteht, dass man von jedem Kreis von G einen Knotenpunkt entfernt. Offensichtlich gilt dann

$$|V(G')| \geq \frac{n}{2}, \qquad \alpha(G') \leq \alpha(G)$$

Da $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}$ folgt:

$$\chi(G') \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{\frac{l}{l+1}} \ln n + 1} = \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6\ln n + \frac{2}{n^{\frac{l}{l+1}}}} > \frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6\ln n + 2}$$

Die Behauptung folgt, da für ausreichend großes n

$$\frac{n^{\frac{1}{l+1}}}{6\ln n + 2} > k$$

$\square$