

Zusammenfassung zu Graphentheorie

Sara Adams

2. Juli 2005

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung

Graphentheorie

gehalten im Wintersemester 2004/05

von PD Dr. Uwe Leck
an der Universität Rostock

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
1.1 Begriffe	3
1.1.1 Graphen und Untergraphen	3
1.1.2 Nachbarschaften	3
1.1.3 Kantenmengen	3
1.1.4 Kanten- und Knotenbeziehungen	3
1.1.5 Valenzen	4
1.1.6 Spezielle Graphen	4
1.2 Operationen	4
1.3 Grundlegende Eigenschaften	4
2 Spezielle Graphenklassen	5
2.1 Vollständige Graphen und Cliques	5
2.2 Wege und Kreise	5
2.2.1 Wege und Kreise	5
2.2.2 Umfang, Taillenweite und Abstand	5
2.2.3 Sätze	5
2.3 Zusammenhängende Graphen	6
2.3.1 Zusammenhang, Komponenten und Gerste	6
2.3.2 Der Satz von Mader	6
2.3.3 Der Satz von Menger	6

Sara Adams	Zusammenfassung zu Graphentheorie - WS 2004/05	2
2.4	Bipartite Graphen	6
2.4.1	k -partite Graphen	6
2.4.2	Sätze	6
2.5	Eulersche Graphen	6
2.5.1	Euler-Kreise und -Wege	6
2.5.2	Sätze	6
2.6	Bäume und Wälder	7
2.6.1	Bäume und Wälder	7
2.6.2	Sätze	7
2.7	Planare Graphen	7
2.7.1	Planarität, Gebiete und Ränder	7
2.7.2	Sätze	7
2.7.3	Die Eulersche Polyederformel	7
2.7.4	Der Satz von Kuratowski	8
3	Faktoren und Matchings	8
3.1	Faktoren und Matchings	8
3.2	Sätze	8
3.2.1	Der Heiratssatz	8
3.2.2	Der Satz von Hall	8
3.2.3	Der Satz von Petersen	8
3.2.4	Der Satz von Tutte	9
3.3	Faktorisierungen	9
3.3.1	Faktorisierungen, Hamilton-Wege und -Kreise	9
3.3.2	Sätze	9
4	Färbungen	10
4.1	Knoten- und Kantenfärbungen	10
4.2	Sätze	10
4.2.1	Der Satz von König	10
4.2.2	Der Satz von Vizing	10
4.2.3	Der Satz von Brooks	10
4.2.4	Der Satz von Grötsch	10
4.2.5	Der 4-Farben-Satz	10

In diesem Skript werden nur endliche Graphen betrachtet.

1 Einführung

1.1 Begriffe

1.1.1 Graphen und Untergraphen

Graph $G = (V, E)$, wobei $V \cap E = \emptyset$, $E \subseteq \binom{V}{2}$

- V : Knotenmenge, $n := |V|$ Ordnung von G
- E : Kantenmenge, $m := |E|$
- $G' = (V', E')$ Teilgraph von $G = (V, E) : \Leftrightarrow V' \subseteq V, E' \subseteq E, G'$ Graph (Bez. $G' \subseteq G$)
- $G' = (V', E')$ Obergraph von $G = (V, E) : \Leftrightarrow V' \supseteq V, E' \supseteq E, G'$ Graph (Bez. $G' \supseteq G$)
- $G' = (V', E')$ induzierter Teilgraph (Untergraph) von $G = (V, E)$
 $: \Leftrightarrow V' \subseteq V, E' = \{vw \in E : v, w \in V'\}$ (Bez. $G[V']$)
- $G' = (V', E')$ aufspannender Teilgraph von $G = (V, E) : \Leftrightarrow V' = V$

1.1.2 Nachbarschaften

- $v \in V : N(v) := \{w \in V : vw \in E\}$
- $v \in V : \overline{N}(v) := N(v) \cup \{v\}$
- $X \subseteq V : N(X) := \bigcup_{x \in X} N(x) \setminus X$

1.1.3 Kantenmengen

- $X, Y \subseteq V : E(X, Y) := \{xy \in E : x \in X, y \in Y\}$
- $x \in V : E(x) := \{xy \in E : x \neq y, y \in V\}$

1.1.4 Kanten- und Knotenbeziehungen

- $x, y \in V$ adjazent $: \Leftrightarrow xy \in E$
- $x \in V, e \in E$ inzident $: \Leftrightarrow x \in e$
- $e, f \in E$ inzident $: \Leftrightarrow e \cap f \neq \emptyset$

1.1.5 Valenzen

- $x \in V : d(x) := |N(x)|$
- x isoliert $: \Leftrightarrow d(x) = 0$
- $\delta(x) := \min_{x \in V} d(x)$ Minimalgrad
- $\Delta(x) := \max_{x \in V} d(x)$ Maximalgrad
- $d(G) := \frac{\sum_{x \in V} d(x)}{|V|}$ Durchschnittsgrad
- $\varepsilon(G) := \frac{1}{2}d(G)$

1.1.6 Spezielle Graphen

- $|V| < \infty$: endlicher Graph
- (\emptyset, \emptyset) : leerer Graph
- $\delta(G) = \Delta(G) = k : k$ -regulärer Graph
- G 3-regulär: G kubisch

1.2 Operationen

- $U \subset V : G - U := (V \setminus U, E \setminus \{e \in E : \exists u \in U, v \in V : e = uv\})$
- $H \subset G : G - H := G - V(H)$
- $F \subset E : G - F := (V, E \setminus F)$
- $F \subset \binom{V}{2} : G + F := (V, E \cup F)$
- $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ (Komplement)
- $L(G) :=$ Graph, bei dem die Knoten die Kanten von G sind und diese adjazent sind, falls die Kanten in G inzident sind (Kantengraph)

1.3 Grundlegende Eigenschaften

- $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$
- $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$
- $|\{x \in V : d(x) \bmod 2 = 1\}| \bmod 2 = 0$
- $G = (V, E), m \geq 1 \Rightarrow \exists H \subset G : \delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

2 Spezielle Graphenklassen

2.1 Vollständige Graphen und Cliques

- $K_n := (V, \binom{V}{2})$ vollständiger Graph
- Clique := vollständiger Teilgraph
- Cliquenzahl $\omega(G) := \max\{|C| : C \subset G\}$
- Coclique / unabhängige (stabile) Menge := Menge von paarweise nicht adjazenten Knoten in V
- Stabilitätszahl / Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) := \max\{|M| : M \subset V \text{ stabil}\}$

2.2 Wege und Kreise

2.2.1 Wege und Kreise

- $P_k = x_0x_1\dots x_k$ Weg der Länge k
- $A, B \subset V$: A - B -Weg : Weg P mit $P \cap A = \{x_0\}, P \cap B = \{x_k\}$
- $P^{(1)}, P^{(2)}$ kreuzungsfreie a - b -Wege $:\Leftrightarrow P^{(1)} \cap P^{(2)} = \{a, b\}$
- $C_k = x_0x_1\dots x_{k-1}x_0, k \geq 3$: Kreis der Länge k

2.2.2 Umfang, Tailenweite und Abstand

- Umfang von G := Länge eines längsten Kreises in G
- Tailenweite von G : $g(G) :=$ Länge eines kürzesten Kreises in G
- Sehne von C_k : $x_ix_j : x_ix_j \notin E(C_k)$
- $X, Y \subset V$: $d_G(X, Y) :=$ Länge eines kürzesten X - Y -Weges
- $diam(G) := \max\{d_G(x, y) : x, y \in V\}$ Durchmesser von G

2.2.3 Sätze

- Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$
- $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow G$ enthält einen Kreis der Länge $\delta(G) + 1$
- $g(G) \geq 3 \Rightarrow g(G) \leq 2 \cdot diam(G) + 1$

2.3 Zusammenhängende Graphen

2.3.1 Zusammenhang, Komponenten und Gerste

- G zusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall x, y \in V \exists x$ - y -Weg
- G k -zusammenhängend $:\Leftrightarrow |G| > k, G - X$ zusammenhängend $\forall X \subset V, |X| < k$
- Zusammenhangszahl $\kappa(G) := \max\{k : G \text{ } k\text{-zshg.}\}$
- Komponente von G := maximaler zusammenhängender Teilgraph von G
- Gerüst von G := minimaler aufspannender Teilgraph von G , dessen Schnitt mit jeder Komponente zusammenhängend ist
- $A, B \subset V$: X ist A - B -Trenner $:\Leftrightarrow X \subset V$, jeder A - B -Weg enthält einen Knoten aus X

2.3.2 Der Satz von Mader

$$d(G) \geq 4k \Rightarrow G \text{ hat einen } k\text{-zshg. Teilgraphen}$$

2.3.3 Der Satz von Menger

$A, B \subset V$: Die kleinste Mächtigkeit eines A - B -Trenners ist gleich der größtmöglichen Anzahl knotendisjunkter A - B -Wege

2.4 Bipartite Graphen

2.4.1 k -partite Graphen

- $G = (V, E)$ bipartit $:\Leftrightarrow V = V_1 \dot{\cup} V_2, V_1, V_2 \neq \emptyset$ unabhängige Mengen (Bez. $G = (V_1 \cup V_2, E)$)
- $G = (V, E)$ k -partit $:\Leftrightarrow V = \dot{\cup} V_i, V_i \neq \emptyset$ unabhängige Mengen
- K_{n_1, \dots, n_k} vollständiger k -partiter Graph $:\Leftrightarrow |V_i| = n_i, [x \in V_i, y \in V_j, i \neq j \Rightarrow xy \in E]$

2.4.2 Sätze

- G bipartit $\Leftrightarrow G$ enthält keinen Kreis ungerader Länge

2.5 Eulersche Graphen

2.5.1 Euler-Kreise und -Wege

- Euler-Kreis $e_1e_2\dots e_m$: $E = \{e_1, \dots, e_m\}, e_i, e_{i+1} (i = 1, \dots, m)$ inzident mit $e_{m+1} := e_1$
- Euler-Weg $e_1e_2\dots e_m$: $E = \{e_1, \dots, e_m\}, e_i, e_{i+1} (i = 1, \dots, m-1)$ inzident, $e_1 \neq e_m$

2.5.2 Sätze

Sei G zusammenhängend

- G enthält einen Euler-Kreis $\Leftrightarrow \forall x \in V : d(x) \bmod 2 = 0$
- G enthält einen Euler-Weg $\Leftrightarrow \exists x \neq y \in V : d(x) \bmod 2 = d(y) \bmod 2 = 1, \forall z \in V \setminus \{x, y\} : d(z) \bmod 2 = 0$

2.6 Bäume und Wälder

2.6.1 Bäume und Wälder

- G Wald $\Leftrightarrow G$ enthält keinen Kreis
- G Baum $\Leftrightarrow G$ ist Zusammenhangskomponente von einem Wald

2.6.2 Sätze

- G Wald $\Leftrightarrow [x, y \in V \Rightarrow \exists \text{ max. ein } x\text{-}y\text{-Weg in } G]$
- G ist Baum $\Leftrightarrow G$ zusammenhängend, $G - e$ nicht zusammenhängend $\forall e \in E \Leftrightarrow G$ kreisfrei, $\forall x, y \in V, xy \notin E : G + xy$ enthält einen Kreis
- Jeder zusammenhängende Graph enthält einen aufspannenden Baum.
- $G = (V, E)$ Baum $\Rightarrow |E| = n - 1$
- $G = (V, E)$ Wald mit c Komponenten $\Rightarrow |E| = n - c$
- $G = (V, E)$ Baum, $n \geq 2 \Rightarrow \exists x \neq y \in V : d(x) = d(y) = 1$

2.7 Planare Graphen

2.7.1 Planarität, Gebiete und Ränder

- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **planar**, wenn er sich so in der Ebene darstellen lässt, dass verschiedene Knoten verschiedenen Punkten der Ebene entsprechen und die Kanten einfachen Jordan-Kurven, so dass der Durchschnitt von je zwei dieser Kurven entweder leer ist oder aus genau einem gemeinsamen Endpunkt besteht.
- Entfernt man die Kanten eines ebenen Graphen G aus dem \mathbb{R}^2 , so zerfällt die Ebene in **Gebiete**, die offen sind und von denen genau eines unbeschränkt ist.
- Der **Rand** eines Gebietes ist die Menge der Kanten in seinem Abschluß.
- Zwei Gebiete sind **benachbart**, wenn ihre Ränder eine gemeinsame Kante haben.

2.7.2 Sätze

- Jeder planare Graph besitzt eine Darstellung als ebener Graph, bei der alle Kanten durch Strecken dargestellt sind.
- G planar $\Rightarrow m \leq \max\{n - 1, \frac{g}{g-2}(n - 2)\}$ ($g = \infty$, falls G Wald)
- G planar $\Rightarrow m \leq 3n - 6$
- $K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar

2.7.3 Die Eulersche Polyederformel

Sei G zshg., ebener Graph mit f Gebieten. $\Rightarrow n - m + f = 2$

2.7.4 Der Satz von Kuratowski

- eine **Unterteilung** von G ist ein Graph, der sich aus G erzeugen lässt, indem Kanten durch Wege ersetzt werden.
- G planar $\Leftrightarrow G$ enthält keine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder K_5

3 Faktoren und Matchings

3.1 Faktoren und Matchings

- Ein Matching in G ist ein Teilgraph, der nur aus unabhängigen Kanten besteht (paarweise nicht inzidenten Kanten).
- Ein maximales Matching ist ein Matching, dem keine weiteren Kanten hinzugefügt werden können.
- M Matching maximaler Größe $\Leftrightarrow \exists M_2$ Matching: $|E(M_2)| > |E(M)|$
- Ein Faktor von $G = (V, E)$ ist ein spannender Teilgraph $G' = (V, E')$.
- Ein k -Faktor von G ist ein k -regulärer Faktor.
- Ein perfektes Matching ist ein 1-Faktor.
- $U \subset V$ Knotenüberdeckung $\Leftrightarrow e \cap U \neq \emptyset \forall e \in E$

3.2 Sätze

3.2.1 Der Heiratssatz

Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann gilt:

$$G \text{ enthält ein Matching mit } |A| \text{ Kanten} \Leftrightarrow \forall X \subset A : |N(X)| \geq |X|$$

3.2.2 Der Satz von Hall

Seien A_1, \dots, A_m Mengen. $R = \{a_1, \dots, a_m\}$ heißt **Repräsentantensystem** für A_1, \dots, A_m , falls $a_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, m$) und $a_i \neq a_j \forall i \neq j$

$$A_1, \dots, A_m \text{ besitzt ein Repräsentantensystem} \Leftrightarrow \forall S \subset \{1, \dots, m\} : |\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S|$$

3.2.3 Der Satz von Petersen

$k \geq 1$: Jeder $2k$ -reguläre Graph hat einen 2-Faktor.

3.2.4 Der Satz von Tutte

Es sei $q(H)$ die Anzahl der ungeraden Komponenten von H . Dann gilt:

$$G \text{ besitzt einen 1-Faktor} \Leftrightarrow \forall S \subset V : |S| \geq q(G - S)$$

- G bipartit \Rightarrow Die Mächtigkeit eines größten Matchings in G ist gleich der kleinstmöglichen Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung.
- $G = (A \cup B, E)$ bipartit, $d \in \mathbb{N}, \forall X \subset A : |N(X)| \geq |X| - d \Rightarrow \exists$ Matching mit $|A| - d$ Kanten
- Jeder k -reguläre, bipartite Graph ($k \geq 1$) enthält ein perfektes Matching.
- G enthält genau dann ein Matching M mit $|V(M)| \geq n - d$, wenn $\forall S \subset V : q(G - S) \leq |S| + d$

3.3 Faktorisierungen

3.3.1 Faktorisierungen, Hamilton-Wege und -Kreise

- Eine Faktorisierung von $G = (V, E)$ ist eine Menge $\{H_1, \dots, H_l\}$ von spannenden Teilgraphen von G mit $E = \dot{\bigcup}_{i=1, \dots, l} E(H_i)$
- k -Faktorisierung: H_i ist k -regulär $\forall i = 1, \dots, l$
- H -Faktorisierung: H_i ist isomorph zu $H \forall i = 1, \dots, l$
- Ein Kreis der Länge $n = |V|$ heißt Hamiltonkreis von G
- Ein Kreis der Länge $n - 1$ ist ein fast-hamiltonischer Kreis.
- Ein Weg der Länge $n - 1$ heißt Hamiltonweg.

3.3.2 Sätze

- $n \geq 3$ ungerade $\Rightarrow \exists$ H -Faktorisierung des K_n mit $H = \frac{n-1}{2} \cdot K_2 + v$
- $n \geq 4$ gerade $\Rightarrow \exists$ 1-Faktorisierung des K_n
- $n \geq 2$ gerade $\Rightarrow \exists P_n$ -Faktorisierung des K_n
- $n \geq 3$ ungerade $\Rightarrow \exists C_n$ -Faktorisierung des K_n
- Jeder k -reguläre, bipartite Graph ($k \geq 1$) ist 1-faktorisierbar.
- G ist 2-faktorisierbar $\Leftrightarrow G$ ist $2k$ -regulär ($k \geq 1$)

4 Färbungen

4.1 Knoten- und Kantenfärbungen

1. Knotenfärbungen

- Eine C -Knotenfärbung von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \rightarrow C$
- Eine C -Knotenfärbung ist zulässig $:\Leftrightarrow [xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)]$
- k -Färbung: zulässige Knotenfärbung mit $|C| = k$
- chromatische Zahl $\chi(G) := \min\{k : \exists k\text{-Färbung von } G\}$

2. Kantenfärbungen

- Eine C -Kantenfärbung von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : E \rightarrow C$
- Eine C -Kantenfärbung ist zulässig $:\Leftrightarrow [xy, xz \in E, y \neq z \Rightarrow c(xy) \neq c(xz)]$
- chromatischer Index $\chi'(G) := \min\{|C| : \exists \text{ zulässige } C\text{-Kantenfärbung von } G\}$

4.2 Sätze

4.2.1 Der Satz von König

$$G \text{ bipartit} \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$$

4.2.2 Der Satz von Vizing

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

4.2.3 Der Satz von Brooks

$$G \text{ zusammenhängend, } G \notin \{K_n, C_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$$

Bemerkung: $\chi(K_n) = n, \chi(C_{2n+1}) = 3$

4.2.4 Der Satz von Grötsch

Jeder dreiecksfreie, planare Graph ist 4-färbbar.

4.2.5 Der 4-Farben-Satz

Jeder planare Graph ist 4-färbbar.