Zusammenfassung zu Graphentheorie

Sara Adams

2. Juli 2005

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Graphentheorie
gehalten im Wintersemester 2004/05
von PD Dr. Uwe Leck
an der Universität Rostock

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**
1.1 Begriffe . . . 3
1.1.1 Graphen und Untergraphen . . . 3
1.1.2 Nachbarschaften . . . 3
1.1.3 Kantenmengen . . . 3
1.1.4 Kanten- und Knotenbeziehungen . . . 3
1.1.5 Valenzen . . . 4
1.1.6 Spezielle Graphen . . . 4
1.2 Operationen . . . 4
1.3 Grundlegende Eigenschaften . . . 4

2 Spezielle Graphenklassen **5**
2.1 Vollständige Graphen und Cliquen . . . 5
2.2 Wege und Kreise . . . 5
2.2.1 Wege und Kreise . . . 5
2.2.2 Umfang, Taillenweite und Abstand . . . 5
2.2.3 Sätze . . . 5
2.3 Zusammenhängende Graphen . . . 6
2.3.1 Zusammenhang, Komponenten und Gerste . . . 6
2.3.2 Der Satz von Mader . . . 6
2.3.3 Der Satz von Menger . . . 6

2.4 Bipartite Graphen . . . 6
2.4.1 k-partite Graphen . . . 6
2.4.2 Sätze . . . 6
2.5 Eulersche Graphen . . . 6
2.5.1 Euler-Kreise und -Wege . . . 6
2.5.2 Sätze . . . 6
2.6 Bäume und Wälder . . . 7
2.6.1 Bäume und Wälder . . . 7
2.6.2 Sätze . . . 7
2.7 Planare Graphen . . . 7
2.7.1 Planarität, Gebiete und Ränder . . . 7
2.7.2 Sätze . . . 7
2.7.3 Die Eulersche Polyederformel . . . 7
2.7.4 Der Satz von Kuratowski . . . 8

3 Faktoren und Matchings **8**
3.1 Faktoren und Matchings . . . 8
3.2 Sätze . . . 8
3.2.1 Der Heiratssatz . . . 8
3.2.2 Der Satz von Hall . . . 8
3.2.3 Der Satz von Petersen . . . 8
3.2.4 Der Satz von Tutte . . . 9
3.3 Faktorisierungen . . . 9
3.3.1 Faktorisierungen, Hamilton-Wege und -Kreise . . . 9
3.3.2 Sätze . . . 9

4 Färbungen **10**
4.1 Knoten- und Kantenfärbungen . . . 10
4.2 Sätze . . . 10
4.2.1 Der Satz von König . . . 10
4.2.2 Der Satz von Vizing . . . 10
4.2.3 Der Satz von Brooks . . . 10
4.2.4 Der Satz von Grötsch . . . 10
4.2.5 Der 4-Farben-Satz . . . 10

In diesem Skript werden nur endliche Graphen betrachtet.

1 Einführung

1.1 Begriffe

1.1.1 Graphen und Untergraphen

Graph $G = (V, E)$, wobei $V \cap E = \emptyset,\ E \subseteq \binom{V}{2}$

- V: Knotenmenge, $n := |V|$ Ordnung von G
- E: Kantenmenge, $m := |E|$
- $G' = (V', E')$ Teilgraph von $G = (V, E) :\Leftrightarrow\ V' \subseteq V, E' \subseteq E, G'$ Graph (Bez. $G' \subseteq G$)
- $G' = (V', E')$ Obergraph von $G = (V, E) :\Leftrightarrow\ V' \supseteq V, E' \supseteq E, G'$ Graph (Bez. $G' \supseteq G$)
- $G' = (V', E')$ induzierter Teilgraph (Untergraph) von $G = (V, E)$
  $:\Leftrightarrow\ V' \subseteq V, E' = \{vw \in E :\ v, w \in V'\}$ (Bez. $G[V']$)
- $G' = (V', E')$ aufspannender Teilgraph von $G = (V, E) :\Leftrightarrow\ V' = V$

1.1.2 Nachbarschaften

- $v \in V :\ N(v) := \{w \in V :\ vw \in E\}$
- $v \in V :\ \overline{N}(x) := N(v) \cup \{v\}$
- $X \subseteq V :\ N(X) := \bigcup_{x \in X} N(x) \backslash X$

1.1.3 Kantenmengen

- $X, Y \subseteq V :\ E(X, Y) := \{xy \in E :\ x \in X, y \in Y\}$
- $x \in V :\ E(x) := \{xy \in E :\ x \neq y, y \in V\}$

1.1.4 Kanten- und Knotenbeziehungen

- $x, y \in V$ adjazent $:\Leftrightarrow\ xy \in E$
- $x \in V, e \in E$ inzident $:\Leftrightarrow\ x \in e$
- $e, f \in E$ inzident $:\Leftrightarrow\ e \cap f \neq \emptyset$

1.1.5 Valenzen

- $x \in V :\ d(x) := |N(x)|$
- x isoliert $:\Leftrightarrow\ d(x) = 0$
- $\delta(x) := \min_{x \in V} d(x)$ Minimalgrad
- $\Delta(x) := \max_{x \in V} d(x)$ Maximalgrad
- $d(G) := \frac{\sum_{x \in V} d(x)}{|V|}$ Durchschnittsgrad
- $\varepsilon(G) := \frac{1}{2} d(G)$

1.1.6 Spezielle Graphen

- $|V| < \infty$: endlicher Graph
- $(\emptyset, \emptyset)$: leerer Graph
- $\delta(G) = \Delta(G) = k :\ k$-regulärer Graph
- G 3-regulär: G kubisch

1.2 Operationen

- $U \subset V :\ G - U := (V \backslash U, E \backslash \{e \in E : \exists u \in U, v \in V :\ e = uv\})$
- $H \subset G :\ G - H := G - V(H)$
- $F \subset E :\ G - F := (V, E \backslash F)$
- $F \subset \binom{V}{2} :\ G + F := (V, E \cup F)$
- $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \backslash E)$ (Komplement)
- $L(G) :=$ Graph, bei dem die Knoten die Kanten von G sind und diese adjazent sind, falls die Kanten in G inzident sind (Kantengraph)

1.3 Grundlegende Eigenschaften

- $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$
- $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$
- $|\{x \in V :\ d(x) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$
- $G = (V, E),\ m \geq 1 \Rightarrow\ \exists H \subset G :\ \delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

2 Spezielle Graphenklassen

2.1 Vollständige Graphen und Cliquen

- $K_n := (V, \binom{V}{2})$ vollständiger Graph
- Clique := vollständiger Teilgraph
- Cliquenzahl $\omega(G) := \max\{l : K_l \subset G\}$
- Coclique / unabhängige (stabile) Menge:= Menge von paarweise nicht adjazenten Knoten in V
- Stabilitätszahl / Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) := \max\{|M| : M \subset V \text{ stabil}\}$

2.2 Wege und Kreise

2.2.1 Wege und Kreise

- $P_k = x_0x_1..x_k$ Weg der Länge k
- $A, B \subset V$: A-B-Weg : Weg P mit $P \cap A = \{x_0\}, P \cap B = \{x_k\}$
- $P^{(1)}, P^{(2)}$ kreuzungsfreie a-b-Wege $:\Leftrightarrow P^{(1)} \cap P^{(2)} = \{a, b\}$
- $C_k = x_0x_1..x_{k-1}x_0,\ k \geq 3$: Kreis der Länge k

2.2.2 Umfang, Taillenweite und Abstand

- Umfang von G := Länge eines längsten Kreises in G
- Taillenweite von G : $g(G)$:= Länge eines kürzesten Kreises in G
- Sehne von C_k : $x_ix_j : x_ix_j \notin E(C_k)$
- $X, Y \subset V$: $d_G(X, Y)$:=Länge eines kürzesten X-Y-Weges
- $diam(G) := \max\{d_G(x, y) : x, y \in V\}$ Durchmesser von G

2.2.3 Sätze

- Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$
- $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow$ G enthält einen Kreis der Länge $\delta(G) + 1$
- $g(G) \geq 3 \Rightarrow g(G) \leq 2 \cdot diam(G) + 1$

2.3 Zusammenhängende Graphen

2.3.1 Zusammenhang, Komponenten und Gerste

- G zusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall x, y \in V\ \exists$ x-y-Weg
- G k-zusammenhängend $:\Leftrightarrow |G| > k, G - X$ zusammenhängend $\forall X \subset V, |X| < k$
- Zusammenhangszahl $\kappa(G) := \max\{k : G\ k\text{-zshg.}\}$
- Komponente von G := maximaler zusammenhängender Teilgraph von G
- Gerüst von G := minimaler aufspannender Teilgraph von G, desses Schnitt mit jeder Komponente zusammenhängend ist
- $A, B \subset V$: X ist A-B-Trenner $:\Leftrightarrow X \subset V$, jeder A-B-Weg enthält einen Knoten aus X

2.3.2 Der Satz von Mader

$d(G) \geq 4k \Rightarrow$ G hat einen k-zshg. Teilgraphen

2.3.3 Der Satz von Menger

$A, B \subset V$: Die kleinste Mächtigkeit eines A-B-Trenners ist gleich der größtmöglichen Anzahl knotendisjunkter A-B-Wege

2.4 Bipartite Graphen

2.4.1 k-partite Graphen

- $G = (V, E)$ bipartit $:\Leftrightarrow V = V_1 \dot\cup V_2,\ V_1, V_2 \neq \emptyset$ unabhängige Mengen (Bez. $G = (V_1 \cup V_2, E)$
- $G = (V, E)$ k-partit $:\Leftrightarrow V = \dot\bigcup V_i,\ V_i \neq \emptyset$ unabhängige Mengen
- $K_{n_1,..,n_k}$ vollständiger k-partiter Graph $:\Leftrightarrow |V_i| = n_i,\ [x \in V_i, y \in V_j, i \neq j \Rightarrow xy \in E]$

2.4.2 Sätze

- G bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge

2.5 Eulersche Graphen

2.5.1 Euler-Kreise und -Wege

- Euler-Kreis $e_1e_2..e_m$: $E = \{e_1, .., e_m\}, e_i, e_{i+1}$ $(i = 1, .., m)$ inzident mit $e_{m+1} := e_1$
- Euler-Weg $e_1e_2..e_m$: $E = \{e_1, .., e_m\}, e_i, e_{i+1}$ $(i = 1, .., m-1)$ inzident, $e_1 \neq e_m$

2.5.2 Sätze

Sei G zusammenhängend

- G enthält einen Euler-Kreis $\Leftrightarrow \forall x \in V : d(x) \mod 2 = 0$
- G enthält einen Euler-Weg $\Leftrightarrow \exists x \neq y \in V : d(x) \mod 2 = d(y) \mod 2 = 1, \forall z \in V \backslash \{x, y\} : d(z) \mod 2 = 0$

2.6 Bäume und Wälder

2.6.1 Bäume und Wälder

- G Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis
- G Baum $:\Leftrightarrow$ G ist Zusammenhangskomponente von einem Wald

2.6.2 Sätze

- G Wald $\Leftrightarrow$ $[x, y \in V \Rightarrow \exists$ max. ein x-y-Weg in $G]$
- G ist Baum $\Leftrightarrow$ G zusammenhängend, $G - e$ nicht zusammenhängend $\forall e \in E \Leftrightarrow$ G kreisfrei, $\forall x, y \in V, xy \notin E:$ $G + xy$ enthält einen Kreis
- Jeder zusammenhängende Graph enthält einen aufspannenden Baum.
- $G = (V, E)$ Baum $\Rightarrow$ $|E| = n - 1$
- $G = (V, E)$ Wald mit c Komponenten $\Rightarrow$ $|E| = n - c$
- $G = (V, E)$ Baum, $n \geq 2 \Rightarrow$ $\exists x \neq y \in V:$ $d(x) = d(y) = 1$

2.7 Planare Graphen

2.7.1 Planarität, Gebiete und Ränder

- Ein Graph $G = (V, E$ heißt **planar**, wenn er sich so in der Ebene darstellen lässt, das verschiedene Knoten verschiedenen Punkten der Ebene entsprechen und die Kanten einfachen Jordan-Kurven, so dass der Durchschnitt von je zwei dieser Kurven entweder leer ist oder aus genau einem gemeinsamen Endpunkt besteht.
- Entfernt man die Kanten eines ebenen Graphen G aus dem $\mathbb{R}^2$, so zerfällt die Ebene in **Gebiete**, die offen sind und von denen genau eines unbeschränkt ist.
- Der **Rand** eines Gebietes ist die Menge der Kanten in seinem Abschluß.
- Zwei Gebiete sind **benachbart**, wenn ihre Ränder eine gemeinsame Kante haben.

2.7.2 Sätze

- Jeder planare Graph besitzt eine Darstellung als ebener Graph, bei der alle Kanten durch Strecken dargestellt sind.
- G planar $\Rightarrow$ $m \leq \max\{n - 1, \frac{g}{g-2}(n-2)\}$ ($g = \infty$, falls G Wald)
- G planar $\Rightarrow$ $m \leq 3n - 6$
- $K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar

2.7.3 Die Eulersche Polyederformel

Sei G zshg., ebener Graph mit f Gebieten. $\Rightarrow$ $n - m + f = 2$

2.7.4 Der Satz von Kuratowski

- eine **Unterteilung** von G ist ein Graph, der sich aus G erzeugen lässt, indem Kanten durch Wege ersetzt werden.
- G planar $\Leftrightarrow$ G enthält keine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder K_5

3 Faktoren und Matchings

3.1 Faktoren und Matchings

- Ein Matching in G ist ein Teilgraph, der nur aus unabhängigen Kanten besteht (paarweise nicht inzidenten Kanten).
- Ein maximales Matching ist ein Matching, dem keine weiteren Kanten hinzugefügt werden können.
- M Matching maximaler Größe $:\Leftrightarrow \nexists M_2$ Matching: $|E(M_2)| > |E(M)|$
- Ein Faktor von $G = (V, E)$ ist ein spannender Teilgraph $G' = (V, E')$.
- Ein k-Faktor von G ist ein k-regulärer Faktor.
- Ein perfektes Matching ist ein 1-Faktor.
- $U \subset V$ Knotenüberdeckung $:\Leftrightarrow$ $e \cap U \neq \emptyset \; \forall e \in E$

3.2 Sätze

3.2.1 Der Heiratssatz

Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann gilt:

$$G \text{ enthält ein Matching mit } |A| \text{ Kanten} \Leftrightarrow \forall X \subset A: \; |N(X)| \geq |X|$$

3.2.2 Der Satz von Hall

Seien $A_1, .., A_m$ Mengen. $R = \{a_1, .., a_m\}$ heißt **Repräsentantensystem** für $A_1, .., A_m$, falls $a_i \in A_i (i = 1, .., m)$ und $a_i \neq a_j \; \forall i \neq j$

$$A_1, .., A_m \text{ besitzt ein Repräsentantensystem} \Leftrightarrow \forall S \subset \{1, .., m\}: \; |\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S|$$

3.2.3 Der Satz von Petersen

$$k \geq 1: \text{ Jeder } 2k\text{-reguläre Graph hat einen 2-Faktor.}$$

3.2.4 Der Satz von Tutte

Es sei $q(H)$ die Anzahl der ungeraden Komponenten von H. Dann gilt:

$$G \text{ besitzt einen 1-Faktor} \Leftrightarrow \forall S \subset V: \ |S| \geq q(G-S)$$

- G bipartit $\Rightarrow$ Die Mächtigkeit eines größten Matchings in G ist gleich der kleinstmöglichen Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung.
- $G = (A \cup B, E)$ bipartit, $d \in \mathbb{N}, \forall X \subset A: \ |N(X)| \geq |X| - d \Rightarrow \exists$ Matching mit $|A| - d$ Kanten
- Jeder k-reguläre, bipartite Graph ($k \geq 1$) enthält ein perfektes Matching.
- G enthält genau dann ein Matching M mit $|V(M)| \geq n - d$, wenn $\forall S \subset V: \ q(G-S) \leq |S| + d$

3.3 Faktorisierungen

3.3.1 Faktorisierungen, Hamilton-Wege und -Kreise

- Eine Faktorisierung von $G = (V, E)$ ist eine Menge $\{H_1, .., H_l\}$ von spannenden Teilgraphen von G mit $E = \dot{\bigcup}_{i=1,..,l} E(H_i)$
- k-Faktorisierung: H_i ist k-regulär $\forall i = 1, .., l$
- H-Faktorisierung: H_i ist isomorph zu H $\forall i = 1, .., l$
- Ein Kreis der Länge $n = |V|$ heißt Hamiltonkreis von G
- Ein Kreis der Länge $n - 1$ ist ein fast-hamiltonischer Kreis.
- Ein Weg der Länge $n - 1$ heißt Hamiltonweg.

3.3.2 Sätze

- $n \geq 3$ ungerade $\Rightarrow \exists$ H-Faktorisierung des K_n mit $H = \frac{n-1}{2} \cdot K_2 + v$
- $n \geq 4$ gerade $\Rightarrow \exists$ 1-Faktorisierung des K_n
- $n \geq 2$ gerade $\Rightarrow \exists P_n$-Faktorisierung des K_n
- $n \geq 3$ ungerade $\Rightarrow \exists C_n$-Faktorisierung des K_n
- Jeder k-reguläre, bipartite Graph ($k \geq 1$) ist 1-faktorisierbar.
- G ist 2-faktorisierbar $\Leftrightarrow$ G ist $2k$-regulär ($k \geq 1$)

4 Färbungen

4.1 Knoten- und Kantenfärbungen

1. Knotenfärbungen
   - Eine C-Knotenfärbung von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c: V \to C$
   - Eine C-Knotenfärbung ist zulässig $:\Leftrightarrow [xy \in E \Rightarrow c(x) \not= c(y)]$
   - k-Färbung: zulässige Knotenfärbung mit $|C| = k$
   - chromatische Zahl $\chi(G) := \min\{k: \ \exists k\text{-Färbung von } G\}$
2. Kantenfärbungen
   - Eine C-Kantenfärbung von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c: E \to C$
   - Eine C-Kantenfärbung ist zulässig $:\Leftrightarrow [xy, xz \in E, y \neq z \Rightarrow c(xy) \neq c(xz)]$
   - chromatischer Index $\chi'(G) := \min\{|C|: \ \exists \text{ zulässige } C\text{-Kantenfärbung von } G\}$

4.2 Sätze

4.2.1 Der Satz von König

$$G \text{ bipartit} \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$$

4.2.2 Der Satz von Vizing

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq Delta(G) + 1$$

4.2.3 Der Satz von Brooks

$$G \text{ zusammenhängend}, G \notin \{K_n, C_{2n+1}: \ n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$$

Bemerkung: $\chi(K_n) = n, \ \chi(C_{2n+1}) = 3$

4.2.4 Der Satz von Grötsch

Jeder dreiecksfreie, planare Graph ist 4-färbbar.

4.2.5 Der 4-Farben-Satz

Jeder planare Graph ist 4-färbbar.