Zusammenfassung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Sara Adams

11. Juli 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
gehalten im Wintersemester 2002/03
von Prof. Dr. Klaus Metsch
an der Justus-Liebig Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1 Abkürzungen **3**

2 Mengen, Relationen, Abbildungen **3**
2.1 Mengen . . . 3
2.2 Relationen . . . 4
2.3 Abbildungen . . . 4

3 Gruppen und Körper **5**
3.1 Gruppen . . . 5
3.2 Körper . . . 6

4 Vektorräume **6**
4.1 Grundlagen . . . 6
4.2 Unterräume und Erzeugendensysteme . . . 7
4.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit . . . 8
4.4 Basis und Dimension . . . 8
4.5 Faktorräume . . . 9

5 Lineare Abbildungen **10**
5.1 Grundlagen . . . 10
5.2 Kern und Bild . . . 11
5.3 Der Homomorphiesatz . . . 11
5.4 Rechnen mit linearen Abbildungen . . . 11
5.5 Inverse Abbildungen von Isomorphismen . . . 12
5.6 Innere direkte Summen . . . 12

6 Matrizen **12**
6.1 Grundlagen . . . 12
6.2 Elementare Umformungen von Matrizen . . . 13
6.3 Die Inverse von quadratischen Matrizen . . . 14
6.4 Lineare Gleichungssysteme . . . 14
6.5 Koordinatensysteme . . . 15
6.6 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen . . . 15
6.7 Die Determinante . . . 16
6.8 Der Multiplikationssatz für Matrizen . . . 17
6.9 Der Entwicklungssatz für Determinanten . . . 17

7 Anhang **18**
7.1 Direkte Summen . . . 18
7.2 Dualraum . . . 18

1 Abkürzungen

$\Rightarrow$	„impliziert“
$\Leftrightarrow$	„äqivalent zu“
$\forall$	„für alle“
$\exists$	„es existiert ein“
$\exists!$	„es existiert genau ein“

2 Mengen, Relationen, Abbildungen

2.1 Mengen

- **Menge**: Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen
- **Element**: Objekt einer Menge
- Seien $A, B, M_1, .., M_n$ Mengen:
  - **Vereinigung** von Mengen: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - **Vereinigung** von Mengen: $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \{x : \exists\, i \in \{1, .., n\} : x \in M_i\}$
  - **Durchschnitt** von Mengen: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - **Durchschnitt** von Mengen: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{x : x \in M_i \,\forall\, x \in \{1, .., n\}\}$
  - A **ohne** B : $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$
  - **disjunkte Mengen**: $A \cup B = \emptyset = \{\}$
  - A **Teilmenge** von $B \Leftrightarrow$ B **Obermenge** von $A \Leftrightarrow$ $[x \in A \Rightarrow x \in B] \Leftrightarrow$ $A \subseteq B$
  - A **echte Teilmenge** von $B \Leftrightarrow$ $A \subseteq B, A \neq B \Leftrightarrow$ $A \subset B$
  - $(m_1, .., m_n)$ **n-Tupel**: $m_i \in M_i, i+1, .., n$
  - **Kartesisches Produkt**: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
  - $M_1, .., M_n$ **Partition** von A: $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = A$, $M_i \cap M_j = \emptyset \,\forall\, i \neq j$
  - **Potenzmenge** von A : $P(A) = 2^A = \{M : M \subseteq A\}$
- $|M|$ **Mächtigkeit** von der Menge M: Anzahl der (verschiedenen) Elemente von M
- M **endlich** $\Leftrightarrow$ $|M| < \infty$, M **unendlich** $\Leftrightarrow$ $|M| = \infty$
- A, B, C Mengen:
  - **Kommutativgesetze**: $A \cup B = b \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
  - **Assoziativgesetze**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - **Distributivgesetze**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $|A|, |B| < \infty \Rightarrow$ $|A \cup B|, |A \cap B| < \infty$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A| < \infty \Rightarrow$ $|P(A)| = 2^{|A|}$

2.2 Relationen

- R **Relation** von $A \times B$: $R \subseteq A \times B$
- R **Relation** auf $M \Leftrightarrow$ R Relation von $M \times M$
  - **reflexiv** $(a, a) \in R \,\forall\, a \in M$
  - **symmetrisch** $(a, b) \in R \Rightarrow$ $(b, a) \in R \,\forall\, a, b \in M$
  - **antisymmetrisch** $(a, b) \in R \Rightarrow$ $(b, a) \notin R \,\forall\, a, b \in M$
  - **transitiv** $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow$ $(a, c) \in R \,\forall\, a, b, c \in M$
- R **Äquivalenzrelation** $\Leftrightarrow$ R reflexiv, symmetrisch, transitiv
- $\overline{m}$ **Äquivalenzklasse** von $m \in M$: $\sim$ Äquivalenzrelation auf M, $\overline{m} = \{x \in M : m \sim x\}$
  m **Repräsentant** von $\overline{m}$
- R **Ordnungsrelation** $\Leftrightarrow$ R reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
- $\sim$ Äquivalenzrelation auf M, $x, y \in M$:
  - $x \sim y \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$, $x \not\sim y \Rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$
  - Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bilden eine Partition auf M

2.3 Abbildungen

- f **Abbildung** von A nach B: f Relation, $\forall\, a \in A\; \exists!\, b \in B : (a, b) \in f \Leftrightarrow$ $f : A \to B$
  - $b \in B$ **Bild** von $a \in A \Leftrightarrow$ a **Urbild** von $b \Leftrightarrow$ $(a, b) \in f \Leftrightarrow$ $f(a) = b$
  - A **Definitionsbereich** bzw. **Urbildmenge**
  - **Bildmenge**: $f(A) = Bild(f) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$
  - f **injektiv**: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow$ $a_1 = a_2$
  - f **surjektiv**: $b \in B \Rightarrow$ $\exists\, a \in A : f(a) = b$
  - f **bijektiv**: $b \in B \Rightarrow$ $\exists!\, a \in A : f(a) = b$
- A, B **gleichmächtig:** $\exists$ Bijektion $f : A \to B \Leftrightarrow$ $|A| = |B|$
- $f_{|A}, A \subseteq B$ **Einschränkung** von $f : B \to C$
- **Identität** auf A : $id_A : A \to A, a \mapsto a$
- $f : A \to B, g : C \to D$, $f(A) \subseteq C$: $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \,\forall\, a \in A$
- $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- $f : A \to B$ bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, g : B \to A : g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$ (g **Inverse** zu f)

3 Gruppen und Körper

3.1 Gruppen

Definitionen

- $\circ$ **Verknüpfung** auf $M: \circ : M \times M \to M \quad \big(a \circ b = \circ((a,b))\big)$
- G **Gruppe** mit Verknüpfung $\circ \Leftrightarrow (G, \circ) \Leftrightarrow$
  - $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \; \forall \; a, b, c \in G$ (**Assoziativgesetz**)
  - $\exists \; e \in G: \; e \circ g = g \; \forall \; g \in G$ (**neutrales Element**)
  - $g \in G \Rightarrow \; \exists \; g^{-1} \in G: \; g \circ g^{-1} = e$ (**inverses Element**)
- G **abelsche Gruppe**: G Gruppe, $\forall \; a, b \in G : a \circ b = b \circ a$
- U **Untergruppe** von $(G, \circ)$: $U \subseteq G, U$ Gruppe bzgl. $\circ_{|U \times U}$
- U **triviale Untergruppe** von G: $U \in \big\{\{e\}, G\big\}$
- G multipikative Gruppe: **Einselement** neutrales Element von G
- G additive Gruppe: **Nullelement** neutrales Element von G
- $g \in G: \; g^0 = e, \; g^1 = g, \; g^n = g \circ g^{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; g^z = (g^{-z})^{-1} \; \forall \; z \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}_0$

Sätze

- G Gruppe, $a, b \in G$
  - $b \circ a = e \Rightarrow a \circ b = e, b = a^{-1}$ (Eindeutigkeit vom inversen Element)
  - $f \in G : f \circ a = a \; \forall a \in G \Rightarrow \; f = e$ (Eindeutigkeit vom neutralen Element)
  - $a \circ e = a, \quad e^{-1} = e$
  - $(a^{-1})^{-1} = a, \quad (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
  - $a \circ b = a \circ c \Rightarrow \; b = c, \quad b \circ a = c \circ a \Rightarrow \; b = c$
- **Untergruppenkriterium**: U Untergruppe von $G \Leftrightarrow$:
  - $e \in U$
  - $a, b \in U \Rightarrow \; a \circ b \in U$
  - $a \in U \Rightarrow \; a^{-1} \in U$
- $(g^m)^n = (g^n)^m, \; (g^m)^{-1} = (g^{-1})^m \; \forall \; m, n \in \mathbb{Z}$

3.2 Körper

Definitionen

- K **Körper** mit Verknüpfungen $+, \cdot$
  - $(K, +)$ abelsche Gruppe (Nullelement $e = 0$, Inverse zu $a: \; -a$)
  - $\exists \; 0 \neq 1 \in K: \; 1 \cdot a = a \; \forall a \in K$ (Existenz des Einselements)
  - $0 \neq a \in K \Rightarrow \; \exists \; a^{-1}: \; a^{-1} \cdot a = 1$ (Existenz der Inversen)
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \; \forall a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
  - $a \cdot b = b \cdot a \; \forall a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \; \forall a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)
- L **Unterkörper** von K: L Körper bzgl. $+_{|L}, \cdot_{|L}$
- $n \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} 1, \; n \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a \; \forall n \in \mathbb{N}$

Sätze

- K Körper
  - $(K^*, \cdot) = (K \backslash \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe
  - $a \cdot b = 0 \Rightarrow \; (a = 0) \vee (b = 0)$
  - $a + b = c \Rightarrow \; a = c + (-b)$ (Schreibweise: $a = c - b$)
  - $a \cdot b = c, \; b \neq 0 \Rightarrow \; a = c \cdot b^{-1}$ (Schreibweise: $a = \frac{c}{b}$)
  - $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \; \forall a \in K$
- **Unterkörperkriterium**: $L \subseteq K$ Unterkörper von K:
  - $0, 1 \in L$
  - $a, b \in L \Rightarrow \; a + b, a \cdot b \in L$
  - $a, b \in L, \; b \neq 0 \Rightarrow \; -a, b^{-1} \in L$

4 Vektorräume

4.1 Grundlagen

Definition und Eigenschaften

- V **K-Vektorraum**: K Körper mit Verknüpfungen $+, \cdot$:
  - $(V, +)$ abelsche Gruppe (**Addition**) mit Nullelement **Nullvektor** 0
  - $\cdot : K \times V \to V$ (**Skalarmultiplikation**)
    - $1 \in K, 1 \cdot v = v \; \forall \; v \in V$
    - $k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w \; \forall \; k \in K, v, w \in V$
    - $(k + l) \cdot v = k \cdot v + l \cdot v \; \forall \; k, l \in K, v \in V$

- $k \cdot (l \cdot v) = (k \cdot l) \cdot v \; \forall \, k, l \in K, v \in V$

- V K-Vektorraum, $k \in K, v \in V$
  - $0 \cdot v = v, \;\; k \cdot 0 = 0$
  - $(-k) \cdot v = k \cdot (-v) = -(k \cdot v)$
  - $k \cdot v = 0 \Rightarrow (k = 0) \vee (v = 0)$

4.2 Unterräume und Erzeugendensysteme

Definitionen

- U **K-Unterraum** von V: $U \subseteq V, U$ Vektorraum bzgl. $+_{|U \times U}, \cdot|K \times U$
- U **trivialer Unterraum** von $V \Leftrightarrow \; U \in \{\{0\}, V\}$
- **Summe** von den Unterräumen $U_1, ..., Un: \; \sum_{i+1}^{n} U_i = \{\sum_{i=1}^{n} u_i : u_i \in U_i, i = 1, .., n\}$
- $v \in V$ **Linearkombination** von $v_1, .., v_s: \; \exists k_1, .., k_s \in K : v = \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot v_i$
- $v \in V$ **Linearkombination** von $\emptyset \neq M \subseteq V$: v Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus M
- $< M >$ **Erzeugnis** von M: Menge aller Vektoren, die Linearkombinationen von M sind $\big(< M >= \{\sum k_v \cdot v : k_v \in K, v \in M\}, \; < \emptyset >= \{0\}\big)$
- M **Erzeugendensystem** von $U: \; M \subseteq U, < M >= U \Leftrightarrow \; M$ **erzeugt** U

Sätze

- **Unterraumkriterium**: V K-Vektorraum: $U \subseteq V$ Unterraum von $V \Leftrightarrow$
  - $0 \in U$
  - $u_1, u_2 \in U \Rightarrow \; u_1 + u_2 \in U$
  - $u \in U, k \in K \Rightarrow \; k \cdot u \in U$
- $U_i, i \in I$ Unterräume $\Rightarrow \; \sum_{i \in I} U_i, \; \bigcap_{i \in I} U_i$ Unterräume
- $M, N \subseteq V$
  - $< M >$ Unterraum von V
  - U Unterraum, $M \subseteq U \Rightarrow < M > \subseteq U$
  - $N \subseteq M \Rightarrow < N > \subseteq < M >$
  - $M \subseteq < N > \Rightarrow < M > \subseteq < N >$
  - $N \subseteq M, M \subseteq < N > \Rightarrow < N >=< M >$

4.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definitionen

- v **linear abhängig** von $v_1, .., v_n \in V: \; v$ Linearkombination von $v_1, .., v_n$
- v **linear unabhängig** von $v_1, .., v_n \in V: \; v$ keine Linearkombination von $v_1, .., v_n$
- $v_1, v_2, .. \in V$ **linear abhängig**: $\exists \; \{v_i : i \in I, |I| < \infty : v_i$ linear abhängig
- $v_1, v_2, .. \in V$ **linear unabhängig**: $v_1, v_2, ..$ nicht linear abhängig
- v **linear abhängig** von $M \subseteq V$: $v \in < M >$
- v **linear unabhängig** von $M \subseteq V$: $v \notin < M >$
- $v_1, .., v_n$ **linear abhängig:** $\exists \; v \in \{v_1, .., v_n\} : \; v$ Linearkombination von $\{v_1, .., v_n\} \backslash \{v\}$
- $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i$ **triviale Darstellung des Nullvektors**: $k_i = 0 \; \forall i = 1, .., n$
- $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i$ **nichttriviale Darstellung des Nullvektors**: $\exists \; i \in \{1, .., n\} : k_i \neq 0$

Sätze

- $v_1, .., v_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow \; \exists \; K \supset \{k_1, .., k_n\} \neq \{0\} : \; \sum_{i+1}^{n} k_i \cdot v_i = 0$
- $v_1, .., v_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \; \big[\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i = 0 \Rightarrow \; k_i = 0 \; \forall i = 1, .., n\big]$
- **Eindeutigkeit der Linearkombinationen** von linear unabhängigen $v_1, .., v_n$: $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot vi = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot v_i, k_i, h_i \in K \Rightarrow \; k_i = h_i \; \forall \; i = 1, .., n$ (**Koeffizientenvergleich**)
- $M \subseteq V$: Vektoren aus M linear abhängig $\Leftrightarrow \; \exists \widetilde{M} \subset M : < \widetilde{M} >=< M >$

4.4 Basis und Dimension

Definitionen

- B **Basis** von V: B linear unahbhängig, $< B >= V$
- B **Standardbasis** von K^n: $B = \{e_1, .., e_n\}, \; e_1 = (1, 0, .., 0), .., e_n = (0, .., 0, 1)$
- $B \subset V$ **maximale Menge linear unabhängiger Vektoren**: B linear unabhängig, $\nexists \; B \neq M \subset V$ linear unabhängig
- $B \subset V$ **minimales Erzeugendensystem** von $V : < B >= V, \; \nexists \; M \subset B :< M >= V$
- U Unterraum von V **endlich erzeugbar**: $\exists \; M \subset U, |M| < \infty, < M >= U$
- $dim(V)$ **Dimension** von V endlich erzeugbar: Mächtigkeit einer Basis von V

Sätze

- B Basis von $V \Rightarrow\ \overline{v} = \sum_{v\in B} k_v \cdot v\ \forall\, \overline{v} \in V$ eindeutig festgelegt
- M linear abhängig, $v \notin < M > \Rightarrow\ M \cup \{v\}$ linear abhängig
- B Basis von $V \Leftrightarrow\ B$ maximale Menge linear unabhängiger Vektoren von $V \Leftrightarrow\ B$ minimales Erzeugendensystem von V
- U endlich erzeugbar $\Rightarrow\ U$ besitzt eine endliche Basis
- **Austauschlemma**: B Basis von V $, w \neq 0 \Rightarrow\ \exists\, v \in B : (B \backslash \{v\}) \cup \{w\}$ Basis von V
- **Austauschsatz von Steinitz**: $B = \{v_1, .., v_n\}$ Basis von V, $M \subset V$ linear unabhängig, $|M| = m \geq 1 \Rightarrow\ m \leq n,\ \exists\, m - n$ Vektoren $u_1, .., u_{n-m} \in B:\ \{u_1, .., u_{n-m}\} \cup M$ Basis von V
- V endlich erzeugbar $\Rightarrow$ alle Basen von V haben dieselbe (endliche) Mächtigkeit
- **Basisergänzungssatz**: $dim(V) < \infty,\ M \subset V$ linear unabhängig $\Rightarrow\ \exists\ M \subseteq B \subset V$ Basis von V
- $dim(V) = n < \infty, M \subset V$ linear unabhängig$\Rightarrow\ |M| \leq n, \big[|M| = n \Leftrightarrow\ M$ Basis von $V\big]$
- $dim(V) < \infty, U$ Unterraum von $V \Rightarrow\ dim(U) \leq dim(V),\ \big[dim(U) = dim(V) \Leftrightarrow\ U = V\big]$
- **Dimensionsformel**: $U, \widetilde{U}$ Unterräume von $V:\ dim(U + \widetilde{U}) + dim(U \cap \widetilde{U}) = dim(U) + dim(\widetilde{U})$
- $B \subset V, dim(V) = |B| = n < \infty:\ B$ Basis $\Leftrightarrow < B >= V \Leftrightarrow\ B$ linear unabhängig

4.5 Faktorräume

Definitionen

- $\overline{v} = v + U$ **Nebenklasse** von $U:\ U$ Unterraum von $V,\ v \in V,\ v + U = \{v + u : u \in U\}, v$ **Repräsentant** von $v + U$
  - $(v + U) + (w + U) = (v + w) + U\ \forall\, v, w \in V$ (Addition)
  - $k \cdot (v + U) = (k \cdot w) + U\ \forall\, k \in K, v \in V$ (Skalarmultiplikation)
- V/U **Faktorraum** von V nach U : V/U Menge aller Nebenklassen von U, U Unterraum von V $(V/U = \{v + U : v \in V\}$

Sätze

- $v - w \in U \Rightarrow\ v + U = w + U$
- $v - w \notin U \Rightarrow\ (v + U) \cap (w + U) = \emptyset$
- V/U ist ein Vektorraum
- U, T Unterräume von V, $U \subseteq T \Rightarrow\ T/U = \{t + U : t \in T\}$ Unterraum von V/U

- U Unterraum von V, $dim(U) = s \leq dim(V) = n < infty$, $\{v_1, .., v_s\}$ Basis von U, $\{v_1, .., v_n\}$ Basis von $V \Rightarrow\ \{\overline{v_{s+1}}, .., \overline{v_n}\}$ Basis von V/U
- **Dimensionsformel für Faktorräume**: $dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$
- U Unterraum von V, $dim(U) = m < \infty, dim(V/U) = n < \infty \Rightarrow\ dim(V) = n + m$
- B Basis vom Unterraum U von V, $\widetilde{B}$ Basis von $V/U \Rightarrow\ B \cup \widetilde{B}$ Basis von V

5 Lineare Abbildungen

5.1 Grundlagen

- $f : V \to W$ **lineare Abbildung**: V, W K-Vektorräume,
  - **Additivität**: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall\, v_1, v_2 \in V$
  - **Homogenität**: $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)\ \forall\, k \in K, v \in V$
- $f \in Hom_K(V, W)$: $f : V \to W$ linear
- $f, g \in Hom(V, W), k \in K$:
  - $(f + g)(v) = f(v) + g(v)\ \forall\, v \in V$
  - $(k \cdot f)(v) = k \cdot f(v)\ \forall\, v \in V$

  $\Rightarrow\ Hom_K(V, W)$ K-Vektorraum
- $End_K(V) = Hom_K(V, V),\ Aut_K(V) = \{f \in End_K(V) : f$ bijektiv$\}$
- $f : V \to W$ linear
  - f bijektiv $\Rightarrow\ V \cong W$
  - $f(0) = 0$
  - $v = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i \in V \Rightarrow\ f(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot f(v_i)$
  - U Unterraum von $V \Rightarrow\ f(U)$ Unterraum von W
  - U Unterraum von $W \Rightarrow\ f^{-1}(U)$ Unterraum von V
- V, W K-Vektorräume, $\{v_1, .., v_n\}$ Basis von $V, w_1, .., w_n \in W \Rightarrow\ \exists!$ lineare Abbildung $f : V \to W : f(v_i) = w_i\ \forall\, i = 1, .., n$
- $f \in Hom_K(V, W),\ v_1, .., v_n \in V$:
  - $v_1, .., v_n$ linear abhängig $\Rightarrow\ f(v_1), .., f(v_n)$ linear abhängig
  - $f(v_1), .., f(v_n)$ linear unabhängig $\Rightarrow\ v_1, .., v_n$ linear unabhängig
  - $dim(V) < \infty \Rightarrow dim\big(f(V)\big) \leq dim(V)$

5.2 Kern und Bild

Definitionen

- **Kern** von $f \in Hom_K(V,W)$: $Kern(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$
- **Bild** von $f \in Hom_K(V,W)$: $Bild(f) = \{f(v) : v \in V\}$
- **natürlicher Epimorphismus** von V auf V/U: $\nu : V \to V/U, v \mapsto v + U$

Sätze

- $f \in Hom_K(V,W), \{v_1,..,v_n\}$Basis von V:
  - $Kern(f)$ ist Unterraum von V
  - $Bild(f)$ ist Unterraum von W
  - f injektiv $\Leftrightarrow$ $Kern(f) = \{0\} \Leftrightarrow$ $f(v_i)$ linear unabhängig
  - f surjektiv $\Leftrightarrow$ $Bild(f) = W \Leftrightarrow < \{f(v_1),..,f(v_n)\} >= W$
  - f bijektiv $\Leftrightarrow$ $\{f(v_1),..,f(v_n)\}$ Basis von W
- $dim(V), dim(W) < \infty$: $V \cong W \Leftrightarrow dim(V) = dim(W)$
- V K-Vektorraum, $dim(V) = n < \infty \Rightarrow V \cong K^n$

5.3 Der Homomorphiesatz

- $f \in Hom_K(V,W) \Rightarrow V/Kern(f) \cong Bild(f), g : V/Kern(f) \to Bild(f), v+Kern(f) \mapsto f(v)$ Isomorphismus
- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen**: $f \in Hom_K(V,W), dim(V) < \infty \Rightarrow dim\big(Bild(f)\big) + dim\big(Kern(f)\big) = dim(V)$
- $dim(V) = dim(W) < \infty, f \in Hom_K(V,W) \Rightarrow \big[f$ injektiv $\Leftrightarrow$ $f$surjektiv$\big]$

5.4 Rechnen mit linearen Abbildungen

- $f \in Hom_K(U,V), g \in Hom_K(V,W) \Rightarrow g \circ f \in Hom_K(U,W)$
- $f \in Hom_K(V_1,V_2), g,h \in Hom_K(V_2,V_3) \Rightarrow g \circ f + h \circ f = (g+h) \circ f$
- $f,g \in Hom_K(V_1,V_2), h \in Hom_K(V_2,V_3) \Rightarrow h \circ f + h \circ g = h \circ (f+g)$
- $f \in Hom_K(V_1,V_2), g \in Hom_K(V_2,V_3), k \in K \Rightarrow k \cdot (g \circ f) = (k \cdot g) \circ f) = g \circ (k \cdot f)$
- $f \in Hom_K(V_1,V_2), g \in Hom_K(V_2,V_3), h \in Hom_K(V_3,V_4) \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- $f,g,h \in End_K(V), k \in K$:
  - $(f+g) \circ h) = f \circ h_g \circ h$
  - $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$
  - $(k \cdot f) \circ g = f \circ (k \cdot g) = k \cdot (f \circ g)$
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

5.5 Inverse Abbildungen von Isomorphismen

- $f \in Hom_K(V,W)$ bijektiv $\Rightarrow$ $\exists\, f^{-1} : W \to V, f^{-1} \circ f = 1_V, f \circ f^{-1} = 1_W$
- $f \in Hom_K(V,W)$ bijektiv $\Rightarrow$ $f^{-1} \in Hom_K(W,V)$ bijektiv
- $dim(V) = dim(W) < \infty, g \in Hom_K(V,W), \exists\, h \in Hom_K(W,V) : (h \circ g = 1_V) \vee (g \circ h = 1_W) \Rightarrow h = g^{-1}$ bijektiv

5.6 Innere direkte Summen

- $V = U_1 \oplus U_2$ **innere direkte Summe** von V: U_1, U_2 Unterräume von V, $U_1 \cap U_2 = \{0\}, U_1 + U_2 = V$, U_1 **Komplement** von U_2
- U_1, U_2 Unterräume von V : $V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \forall\, v \in V \exists!\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : u_1 + u_2 = v$
- U Unterraum von $V, dim(V) < \infty \Rightarrow U$ besitzt ein Komplement in V
- $V = U_1 \oplus U_2, \pi : V \to U_1$: $\big[V \ni v = u_1 + u_2 \Rightarrow \pi(v) = u_1\big] \Rightarrow \pi \in Hom_K(V,U_1)$ surjektiv
- $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow f : U_1 \to V/U_2, u \mapsto u + U_2$ Isomorphismus

6 Matrizen

6.1 Grundlagen

Definitionen

- A **Matrix** aus $K^{m \times n}$: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - **Transponierte** von A : $A^T = (a_{ji}) \in K^{n \times m}$
  - $(a_{i1},..,a_{in}) \in K^{1 \times n}$ **i-ter Zeilenvektor** von A
  - $(a_{1j},..,a_{mj})^T \in K^{m \times 1}$ **j-ter Spaltenvektor** von A
  - **Nullmatrix**: $(0) \in K^{m \times n}$
  - $E_{ij} = (e_{kl}), e_{ij} = 1, e_{kl} = 0$ für $k \neq i, l \neq j$
  - **Standardbasis** von $K^{m \times n}$: $E_{ij}, i = 1,..,m, j = 1,..,n$ $\big(dim(K^{m \times n}\big) = m \cdot n)$
  - $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ (**Addition komponentenweise**)
  - $k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$ (**Skalarmultiplikation komponentenweise**)
  - $(a_{ij}) \in K^{m \times n}, (b_{ij}) \in K^{n \times p} : (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (c_{ij}) \in K^{m \times p}, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$
- $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, v = (k_j) \in K^n = K^{n \times 1} : A \cdot v = (\sum_{l=1}^{n} k_l \cdot a_{il}) \in K^{m \times 1}$
- A **quadratische Matrix**: $A \in K^{n \times n}$
  - $a_{ii}, i = 1,..,n$ **Diagonalemente** von $A \Rightarrow$ **Hauptdiagonale**

- A **untere Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0 \, \forall j > i$
- A **obere Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0 \, \forall i > j$
- A **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0 \, \forall i \neq j$
- E_n **Einheitsmatrix**: Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen 1

Eigenschaften

- $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times p}, C \in K^{p\times q} \Rightarrow \; A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A_1, A_2 \in K^{m\times n}, B_1, B_2 \in K^{n\times p}, k \in K$:
  - $A_1 \cdot (B_1 + B_2) = A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2$
  - $(A_1 + A_2) \cdot B_1 = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1$
  - $A_1 \cdot (k \cdot B_1) = (k \cdot A_1) \cdot B_1 = k \cdot (A_1 \cdot B_1)$
  - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

6.2 Elementare Umformungen von Matrizen

Definitionen

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$:

- **Spaltenraum**: Unterraum von K^m, der von den Spaltenvektoren erzeugt wird
- **Spaltenrang**: Dimension vom Spaltenraum
- **Zeilenraum**: Unterraum von K^n, der von den Zeilenvektoren erzeugt wird
- **Zeilenrang**: Dimension vom Zeilenraum
- **Rang**: Zeilen- bzw. Spaltenrang
- **Elementare Zeilenumformungen**:
  1. Typ: Multiplikation einer Zeile mit einem Körperelement $\neq 0$
  2. Typ: Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
  3. Typ: Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen (k$\in K$)
  4. Typ: Vertauschen von zwei Zeilen
- **Elementare Spaltenumformungen**:
  1. Typ: Multiplikation einer Spalte mit einem Körperelement $\neq 0$
  2. Typ: Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte
  3. Typ: Addition des k-fachen einer Spalte zu einer anderen (k$\in K$)
  4. Typ: Vertauschen von zwei Spalten

Sätze

- Elementare Umformungen ändern weder Zeilen- noch Spaltenrang
- $A \in K^{m\times n}$ kann durch Spaltenvertauschungen und elem. Zeilenumformungen auf folgende Gestalt gebracht werden: $\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N}_0, B \in K^{n-r\times r}$
- $A \in K^{m\times n}$ kann durch elementare Umformungen auf die folgende Gestalt gebracht werden: $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N}_0$
- Der Zeilenrang einer Matrix ist genausogroß wie ihr Spaltenrang.

6.3 Die Inverse von quadratischen Matrizen

- $A \in K^{n\times n}$ **invertierbar** bzw. **regulär**: $\exists \; B \in K^{n\times n} : B \cdot A = A \cdot B = E_n, B = A^{-1}$ **Inverse** von A
- $A \in K^{n\times n}$ **singulär**: A nicht regulär
- **allgemeine lineare Gruppe**: $GL(n,K) = \{A \in K^{n\times n} : A \text{ regulär}\}$, $\big(GL(n,K), \cdot\big)$ Gruppe mit neutralem Element E_n
- $A \in K^{m\times n} \Rightarrow f : K^n \to K^m, v \mapsto A \cdot v \; \in Hom_K(K^n, K^m)$, $Bild(f) =$ Spaltenraum von A
- $f \in Hom_K(K^n, K^m) \Rightarrow \; \exists! \; A \in K^{m\times n} : \; f(v) = A \cdot v \; \forall \; v \in K^n$
- $f : K^n \to K^n, v \mapsto E_n \cdot v$ **identische Abbildung**
- $A, B \in K^{n\times n}, f(v) = A \cdot v, g(v) = B \cdot v \Rightarrow (g \circ f)(v) = (B \cdot A)(v)$, $\big[A \cdot B = E_n \Leftrightarrow \; g \circ f = id\big]$
- $A, B \in K^{n\times n} : A \cdot B = E_n \Leftrightarrow \; B \cdot A = E_n$
- $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Leftrightarrow \; Rang(A) = n$
- $A \in GL(n,K) \Rightarrow \; A^T \in GL(n,K), (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

6.4 Lineare Gleichungssysteme

- **lineares Gleichunssystem**: $A \cdot x = v$
  - gegeben: $A \in K^{m\times n}, b \in K^m$ gesucht: $x \in K^n$
  - $\overline{x} \in K^n$ **Lösung** von $A \cdot x = b$: $A \cdot \overline{x} = b$
  - **homogenes System**: $b = 0 \in K^m$
  - **inhomogenes System**: $b \neq 0 \in K^m$
  - $b \neq 0 \Rightarrow \; A \cdot v = 0$ **zugehöriges homogenes System**
  - $L(A,b) = \{v \in K^n; A \cdot v = b\}$ **Menge aller Lösungen**

- $A \in K^{m\times n} \Rightarrow L(A,0)$ Unterraum von K^n
- $A \in K^{m\times n}, b \in K^m, v_0 \in K^n, A \cdot v_0 = b \Rightarrow L(A,b) = v_0 + L(A,0)$
- $A \cdot x = b$ lösbar $\Leftrightarrow b \in$ Spaltenraum von A
- $A \cdot x = b$ hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow A \in GL(n,K)$
- **Der Gauss-Algorithmus**: Umformen von A in eine obere Dreiecksmatrix durch Spaltenvertauschungen und elementare Zeilenumformungen
- **Invertieren einer Matrix**: Gauss-Algorithmus mit $b = e_1, .., e_n, A$ zur Einheitsmatrix umformen

6.5 Koordinatensysteme

- **Koordinatensystem** von $V: (v_1, .., v_n), dim(V) = n < \infty, B = \{v_1, .., v_n\}$ Basis
- $(k_1, .., k_n)^T$ **Koordinatenvektor** von v bzgl. $B: v = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i$
- $\kappa_B : V \to K^n, \kappa_B(v_i) = e_i, \{v_1, .., v_n\}$ Basis von V: Isomorphismus von V auf K^n
- T **Transformationsmatrix des Koordinatenwechsels** von B auf $\widetilde{B}$: $\widetilde{B} = \{\widetilde{v_1}, .., \widetilde{v_n}\}$ Basis, $T = (t_{ij}), v_i = \sum_{k=1}^n t_{ki} \cdot \widetilde{v_i}$
- $(e_1, .., e_n)$ **Standardkoordinatensystem** von $V = K^n$
- $B = (v_1, .., v_n), \widetilde{B} = (\widetilde{v_1}, .., \widetilde{v_n})$ Koordinatensysteme $\Rightarrow A = (v_1 \, .. \, v_n), \widetilde{A} = (\widetilde{v_1} \, .. \, \widetilde{v_n}) \in GL(n,K),\ T = \widetilde{A}^{-1} \cdot A$ Transformationsmatrix des Koord.wechsels von B auf $\widetilde{B}$

6.6 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

- $A = {}_{B_W}f_{B_V}$ **Darstellungsmatrix** von f bzgl. der Koord.systeme B_V und B_W: $dim(V) = n < \infty, dim(W) = m < \infty, f \in Hom_K(V,W), B_V, B_W$ Koord.system von $V, W \Rightarrow \exists!\ A \in K^{m\times n} : \big[v \in V, x, \widetilde{x}$ Koord.vektoren von $v, f(v) \Rightarrow \widetilde{x} = A \cdot x\big]$
  Die Spaltenvektoren von A sind die Koord.vektoren von $f(v_i)$
- $Rang(f)$ **Rang** von $f \in Hom_K(V,W) : Rang(f) = dim\big(Bild(f)\big)$
- $dim(V_i) = n_i, n_i < \infty, B_i$ Koord.system $i = 1,2,3$
  - $f, g \in Hom_K(V_1, V_2) \Rightarrow {}_{B_2}(f+g)_{B_1} = {}_{B_2}f_{B_1} + {}_{B_2}g_{B_1}$
  - $f \in Hom_K(V_1,V_2), k \in K \Rightarrow {}_{B_2}(k \cdot f)_{B_1} = k \cdot {}_{B_2}f_{B_1}$
  - $f \in Hom_K(V_1,V_2), g \in Hom_K(V_2,V_3) \Rightarrow {}_{B_3}(g \circ f)_{B_1} = ({}_{B_3}g_{B_2}) \circ ({}_{B_2}f_{B_1})$
- $dim(V) = n < \infty, dim(W) = m < \infty, B_V, B_W$ Koord.system von $V, W \Rightarrow Hom_K(V,W) \to K^{m\times n}, f \mapsto {}_{B_W}f_{B_V}$ Vektorraumisomorphismus
- $f \in Hom_K(V,W) \Rightarrow Rang(f) = Rang({}_{B_W}f_{B_V})\ \forall\ B_V, B_W$ Koord.systeme von V, W
- $dim(V), dim(W) < \infty, B_{V_1}, B_{V_2}, B_{W_1}, B_{W_2}$ Koord.systeme, T_V, T_W Transformationsmatrizen der Koordinatenwechsel B_{V_1} auf B_{V_2}, B_{W_1} auf $B_{W_2},\ f \in Hom_K(V,W)$,
  $A_1 = {}_{B_{W_1}}f_{B_{V_1}}, A_2 = {}_{B_{W_2}}f_{B_{V_2}} \Rightarrow A_2 = T_W \cdot A_1 \cdot T_V^{-1}$

- $dim(V) = n < \infty, B_1, B_2$ Koord.systeme von V, T Transformationsmatrix des Koord.wechsels von B_1 auf $B_2, f \in End_K(V), A_1 = {}_{B_1}f_{B_1}, A_2 = {}_{B_2}f_{B_2} \Rightarrow A_2 = T \cdot A_1 \cdot T^{-1}$
- $A \in K^{m\times n}$ Darstellungsmatrix bzgl. der Standardkoord.systeme, B_n, B_m Koord.systeme von K^n, K^m, T_n, T_m Transformationsmatrix von B_n, Bm auf Standardkoord.system $\Rightarrow {}_{B_m}f_{B_n} = T^{-1} \cdot A \cdot T$

6.7 Die Determinante

Permutationen

- π **Permutation** von $\{1, .., n\} : \pi : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\}$ Bijektion
- Π_n **symmetrische Gruppe**: $\Pi_n = \big\{\pi : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\} : \pi \text{ bijektiv}\big\}$
- $(a_1, .., a_r)$ **Zyklus der Länge r**: a_i pw. verschieden, $\pi(i) = i$ für $i \notin \{a_1, .., a_r\}, \pi(a_i) = \pi(a_{i+1}), i = 1, .., r-1, \pi(a_r) = a_1$
- π **Transposition**: π Zyklus der Länge 2
- $s \in \mathbb{N}$ **Ordnung** von $\pi: \pi^s = 1, \nexists\, n \in \mathbb{N} : n < s, \pi^n = 1$
- B **Bahn** von i unter $\pi \in \Pi_n: B = \{\pi^k(i) : k \in \mathbb{N}\}$, **Länge der Bahn**: $|B|$
- z zu B **assoziierter Zyklus**: $B = \{a_1, .., a_r\}, z = (a_1, .., a_r), \pi(a_i) = z(a_i)\ , i = 1, .., r$
- $(a_1, .., a_r), (b_1, .., b_s)$ **disjunkt**: $a_i \neq b_j\ \forall\ i, j$
- $\pi \in \Pi_n$ Zyklus der Länge $r \Rightarrow Ord(\pi) = r,\ \pi^{-1} = \pi^{r-1}$
- $|\Pi_n| = n!$
- τ Transposition $\Rightarrow \tau^2 = 1, \tau^{-1} = \tau$
- Die Bahnen von $\pi \in \Pi_n$ partitionieren $\{1, .., n\}$
- B Bahn von $\pi \in \Pi_n, |B| = r \Rightarrow B = \{i, \pi(i), .., \pi^{r-1}(i)\}\ \forall\ i \in \{1, .., n\}$
- $\pi \in \Pi_n \Rightarrow\ \exists$ Darstellung $\pi = z_1 \, .. \, z_s,\ z_i$ disjunkte Zyklen, $\forall\ i \in \{1, .., n\}\ \ \exists!\ j \in \{1, .., s\} : i \in z_j$ (bis auf Reihenfolge der z_i Darstellung eindeutig)
- $\Pi_n \ni \pi = z_1 \, .. \, z_s,\ z_i$ disjunkt $\Rightarrow s \leq n-1$

Die Signum-Abbildung

- (ij) **Fehlstand** von $\pi: \pi(j) < \pi(i)$
- π **gerade/ungerade**: π hat eine gerade/ungerade Anzahl von Fehlständen
- $sgn(\pi)$ **Signum-Funktion**: $sgn(\pi) = 1$, falls π gerade, $sgn(\pi) = -1$, falls π ungerade
- A_n **alternierende Gruppe** auf n Ziffern: $A_n = \{\pi \in \Pi_n : \pi \text{ gerade}\}$
- $\tau_1, .., \tau_s \in \Pi_n$ Transpositionen $\pi = \tau_1 \, .. \, \tau_s \Rightarrow sgn(\pi) = (-1)^s$

- π Zyklus der Länge $r \Rightarrow sgn(\pi) = (-1)^{r-1}$
- $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_n \Rightarrow sgn(\pi_1\pi_2) = sgn(\pi_1) \cdot sgn(\pi_2), sgn(\pi_1) = sgn(\pi_1^{-1})$
- $A_n \leq \Pi_n, |A_n| = |A_n\pi| = \frac{n!}{2} \; \forall \; \pi \in \Pi_n$

Die Determinante

- **Determinante** von $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}: \; det(A) = \sum_{\pi\in\Pi_n} \left[sgn(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}\right]$
- $A \in K^{n\times n} \Rightarrow det(A) = det(A^T)$
- $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ Dreiecksmatrix $\Rightarrow det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $s_1, .., s_{r-1}, s_{r+1}, .., s_n \in K^n \Rightarrow K^n \to K, v \mapsto det(s_1 \; .. \; s_{r-1} \; v \; s_{r+1} \; .. \; s_n)$ linear
- Auswirkungen von elementaren Umformungen auf die Determinante:
  - Multiplikation einer Zeile/Spalte von A mit $k \in K \Rightarrow k \cdot det(A)$
  - Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten von $A \Rightarrow (-1) \cdot det(A)$
  - Addition des k-fachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen $\Rightarrow det(A)$
- $A \in K^{n\times n} : A$ regulär $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

6.8 Der Multiplikationssatz für Matrizen

- **Elementarmatrizen**:
  - $k \in K\backslash\{0\} : E_i(k) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, a_j = 1 \; \forall \; j \neq i, a_i = k$
  - $E_{ij} = (a_{ij}), a_{ii} = 1 \; \forall \; i = 1, .., n, a_{ij} = 1, a_{kl} = 0$ für $(k \neq l) \vee (k \neq i \vee l \neq j)$
- $det\big(E_i(k)\big) = k \neq 0, det(E_{ij}) = 1$
- Jede reguläre Matrix kann als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden.
- $A, B \in K^{n\times n} \Rightarrow det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) = det(B \cdot A)$
- $A \in GL(n, K) \Rightarrow det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

6.9 Der Entwicklungssatz für Determinanten

- $A = (a_{kl}) \in K^{n\times n}$
  - $A_{ij} = (\alpha_{kl}), \alpha_{kl} = a_{kl}$ für $k \neq i, \; \alpha_{ij} = 1, \alpha_{il} = 0 \; \forall l \neq j$
  - $B_{ij} \in K^{n-1\times n-1}$ Matrix wie A, jedoch i-te Zeile und j-te Spalte gestrichen
- $det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(B_{ij})$
- **Zeilenentwicklung** nach der i-ten Zeile: $det(A) = sum_{j=1}^{n}\left[(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(B_{ij})\right]$

- **Spaltenentwicklung** nach der j-ten Spalte: $det(A) = sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(B_{ij})\right]$
- $A \in GL(n, K) \Rightarrow (ij)-$ter Eintrag von $A^{-1}: \; (-1)^{i+j} \cdot \frac{det(B_{ji})}{det(A)}$

7 Anhang

7.1 Direkte Summen

Innere direkte Summen

- $V = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$ **innere direkte Summe** von $U_1, .., U_s: \; \forall v \in V \; \exists! \; u_i \in U_i: \; v = \sum_{i=1}^{s} u_i$
- $V = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^{s} U_i, [0 = \sum_{i=1}^{s} u_i, u_i \in U_i \Rightarrow u_i = 0 \; \forall \; i]$
- $dim(V) < \infty : V = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^{s} U_i, \; dim(V) = \sum_{i=1}^{s} dim(U_i)$

Äußere direkte Summen

- V **äußere direkte Summe** von $V_1, ..., V_s: \; V = \{(v_1, .., v_s) : v_i \in V_i\}$
  - $+ : V \times V \to V, (u_1, .., u_s) + (v_1, .., v_s) = (u_1 + v_1, .., u_s + v_s)$ (Addition)
  - $\cdot : K \times V \to V, k \cdot (v_1, .., v_s) = (k \cdot v_1, .., k \cdot v_s)$ (Skalarmultiplikation)
  - $U_i = \{(v_1, .., v_s) : v_i \in V_i, v_j = 0 \; \forall \; j \neq i\}$
- U_i Unterraum von $V, \; V = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$
- $\alpha_i : V_i \to U_i, v \mapsto (0, .., 0, v, 0, .., 0)$ Isomorphismus

7.2 Dualraum

- V^* **Dualraum** von $V: \; V^* = Hom_K(V, K)$
- $dim(V) = n < \infty : B = \{v_1, .., v_n\}$ Basis von $V, \; v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \Rightarrow B^* = \{v_1^*, .., v_n^*\}$ Basis von V^*