Zusammenfassung zu Lineare Algebla und Analytische Geometrie II

Sara Adams

11. Juli 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
gehalten im Sommersemester 2003
von Prof. Dr. Klaus Metsch
an der Justus-Liebig Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1 Abkürzungen

$\Rightarrow$	„impliziert“
$\Leftrightarrow$	„äqivalent zu“
$\forall$	„für alle“
$\exists$	„es existiert ein“
$\exists!$	„es existiert genau ein“
$U \subseteq G$	„U ist Teilmenge von G“
$U \subset G$	„U ist echte Teilmenge von G“
$U \leq G$	„U ist Untergruppe von G“
$f \mid g$	„f teilt g“

2 Ringe und Polynome

2.1 Ringe

Definitionen

- R **Ring** mit Verknüpfungen $+, \cdot \Leftrightarrow$
  - $(R,+)$ ablesche Gruppe (mit neutralem Element 0)
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \; \forall \, a,b,c \in R$
  - $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, a \cdot (b = c) = a \cdot b + a \cdot c \; \forall \, a,b,c \in R$
- R **kommutativer Ring** $\Leftrightarrow \; a \cdot b = b \cdot a \; \forall \, a,b \in R$
- R **Ring mit Eins** $\Leftrightarrow \; \exists \, 1 \in R: \; 1 \neq 0, \; 1 \cdot r = r \; \forall \, r \in \; R$
- $End_K(V)$ **Endomorphismenring** von V
- $\phi : R \to S$ **Ringhomomorphismus** $\Leftrightarrow \; R, S$ Ringe, $\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1 + \phi(r_2), \; \phi(r_1 \cdot r_2) = \phi(r_1) \cdot \phi(r_2) \; \; \forall \, r_1, r_2 \in R$
  - ϕ inj., surj., bij.: **Mono-, Epi-, Isomorphismus**
  - **Kern**$(\phi) = \{r \in R : \phi(r) = 0\}$, **Bild**$(\phi) = \{\phi(r) : r \in R\}$
- R **nullteilerfrei** $\Leftrightarrow \nexists \, 0 \neq a \in R : \exists \, 0 \neq b \in \; R, \; a \cdot b = 0$
- I **Ideal** von $R \; \Leftrightarrow \; (I,+) \leq (R,+), \; \; r \cdot i, i \cdot r \in I \; \; \forall \, i \; \in I, r \in R$
- I **maximales Ideal** von R: $I \neq R$ Ideal von R, $[J$ Ideal von $R, I \subset J \Rightarrow J = R]$
- aR **Hauptideal**: R komm. Ring, $a \in R, aR = \{a \cdot r : r \; \in \; R\}$
- R **Hauptidealring** $\Leftrightarrow \; R$ Int.bereich, $[I$ Ideal von $R \Rightarrow \; \exists \, a \in R : I = aR]$

Sätze

- R Ring mit Eins: $I \subseteq R$ Ideal $\Leftrightarrow \; I \neq \emptyset, [a, b \in I, r \in R \Rightarrow a + b, a \cdot r, r \cdot a \in I]$
- $\mathbb{Z}$ ist Hauptidealring mit maximalen Idealen $p\mathbb{Z}, p$ Primzahl

2.2 Der Primkörper

- $r + I$ **Nebenklasse** von $I: \; r + I = \{r + i : i \in I\}$
- $R/I = \{r + I : r \in R\}$ **Faktorring** von R nach I:
  - $(r + I) + (s + I) = (r + s) + I$
  - $(r + I) \cdot (s + I) = (r \cdot s) + I$
- $r + I = s + I \Leftrightarrow \; s - r \in I$
- R kommutativer Ring mit Eins, I maximales Ideal von $R \Rightarrow \; R/I$ Körper

2.3 Die Polynommenge

- $K^\infty = \Big\{(a_0, a_1, ..) : \big|\{a_i : a_i \neq 0\}\big| < \infty\Big\}$:
  - $(a_0, a_1, ..) + (b_0, b_1, ..) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..)$ (Addition)
  - $k \cdot (a_0, a_1, ..) = (k \cdot a_0, k \cdot a_1, ..)$ (Skalarmultiplikation)
  - $(a_0, a_1, ..) \cdot (b_0, b_1, ..) = (c_0, c_1, ..), c_k = \sum_{i=1}^k a_i \cdot b_{k-i}$ (Multiplikation)
- K^∞ kommutativer Ring mit Einselement $(1, 0, ..)$
- $x^0 = (1, 0, ..), x^1 = (0, 1, 0, ..)$, usw.: $(a_0, a_1, ..) = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot x^i$
- $K[x]$ **Polynomring in einer Variablen** über K
  - $f = \sum[a_i \cdot x^i] \in K[x]$ **Polynom**
  - $\sum[a_i \cdot x^i] = \sum[b_i \cdot x^i] \Leftrightarrow \; a_i = b_i \; \forall \, i \in \mathbb{N}_0$ **Koeffizientenvergleich**
  - n **Grad** von $0 \neq f = \sum[a_i \cdot x^i] : \; n = Grad(f) = max\{i : a_i \neq 0\}$
  - $Grad(0) = -\infty$
  - $\sum[a_i \cdot x^i] + \sum[b_i \cdot x^i] = \sum\big[(a_i + b_i) \cdot x^i\big]$
  - $k \cdot \sum[a_i \cdot x^i] = \sum[k \cdot a_i \cdot x^i]$
  - $\Big(\sum[a_i \cdot x^i]\Big) \cdot \Big(\sum[b_i \cdot x^i]\Big) = \sum_{i,j \geq 0}\Big([a_i \cdot x^i] \cdot [b_j \cdot x^j]\Big) = \sum_{n \geq 0}\Big(\sum_{i=0}^n [a_i \cdot b_{n-i} \cdot x^n]\Big)$
- $g \in K[x]$ **Teiler** von $f \in K[x] \; \exists \, h \in K[x] : f = g \cdot h$
- $f, g \in K[x]$ **teilerfremd**: $\nexists$ gemeinsamer Teiler $t: \; Grad(t) \geq 1$
- **Gradsatz**: $f, g \in K[x], K$ Körper
  - $Grad(f + g) \leq max\{Grad(f), Grad(g)\}$
  - $Grad(f \cdot g) = Grad(f) \cdot Grad(g)$
  - $Grad(k \cdot f) = Grad(f) \; \forall 0 \neq k \in K$
- K Körper$\Rightarrow \; K[x]$ nullteilerfrei, Hauptidealring
- **Polynomdivision**: $f = \sum[a_i \cdot x^i], g = \sum[b_i \cdot x^i] \in K[x], Grad(f) = n/geq0, Grad(g) = m/geq0 \Rightarrow \; \exists! \, q, r \in K[x] : \; f = q \cdot g + r, Grad(r) < Grad(g)$
- $f, g \in K[x], f, g \neq 0$ teilerfremd $\Leftrightarrow \; \exists \, a, b \in K[x] : \; a \cdot f + b \cdot g = 1$

2.4 Irreduzible Polynome

Definitionen

- **Polynomabbildung** zu $f \in K[x] : \; K \to K, k \mapsto f(k) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot k^i$
  - $(f + g)(k) = f(k) + g(k) \; \forall \, f, g \in K[x], k \in K$
  - $(f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k) \; \forall \, f, g \in K[x], k \in K$
- $c \in K$ **Nullstelle** von $f \in K[x]; \; f(c) = 0$

- $f \in K[x]$ **irreduzibles Polynom** $\Leftrightarrow Grad(f) \geq 1, \nexists\, g,h \in K[x] : f = g \cdot h, Grad(g) \geq 1, Grad(h) \geq 1$
- a_n **Leitkoeffizient** von $f = \sum_{i=0}^{n}[a_i \cdot x^i], Grad(f) = n$
- $f \in K[x]$ **normiert**: Leitkoeffizient von $f = 1$
- $f \in K[x]$ **Linearfaktor**: $Grad(f) = 1, f$ irreduzibel, normiert
- s **Vielfachheit** von c als Nullstelle von $f:\ f = g \cdot (x-c)^s, (x-c) \nmid g$

Sätze

- $c \in K$ Nullstelle von $f \in K[x] \Leftrightarrow\ (x-c)\big|f$
- $0 \neq f \in K[x]$ hat max. $Grad(f)$ verschiedene Nullstellen
- $p, f_1, .., f_n \in K[x], p$ irreduzibel,$p\big|\prod_{i=1}^{n} f_i \Rightarrow\ \exists\, i:\ p\big|f_i$
- $f, g \in K[x]$ irreduzibel, normiert, $f\big|g \Rightarrow\ f = g$
- $0 \neq f \in K[x] \Rightarrow\ \exists\, a \in K, f_1, .., f_s \in K[x]$ irreduzibel, normiert: $f = a \cdot \prod_{i=1}^{s} f_i$, bis auf Reihenfolge eindeutig

3 Eigenwerte und Darstellungsmatrizen

3.1 Eigenwerte

Definitionen

- $\lambda \in K$ **Eigenwert** von $\phi : V \to V:\ V$ Vektorraum, $\exists\, v \in V:\ v \neq 0, \phi(v) = \lambda \cdot v$
- v **Eigenvektor** zum Eigenwert λ von $\phi:\ \phi(v) = \lambda \cdot v$
- **Eigenraum** von ϕ zu $\lambda:\ E(\phi, \lambda) = \{v \in V : \phi(v) = \lambda \cdot v\}$
- **Spektrum** von ϕ: Menge aller Eigenwerte von ϕ
- λ **Eigenwert** von $A \in K^{n \times n}:\ \exists\, v \in K^n:\ v \neq 0, A \cdot v = \lambda \cdot v$
- v **Eigenvektor** zum Eigenwert λ von $A \in K^{n \times n}:\ A \cdot v = \lambda \cdot v, v \neq 0$
- **Eigenraum** von $A \in K^{n \times n}$ zu $\lambda:\ E(A, \lambda) = \{v \in V : A \cdot v = \lambda \cdot v\}$
- P_A **charakteristisches Polynom** von $A \in K^{n \times n}:\ P_A = det(A - x \cdot E) \in K[x]$
- P_ϕ **charakteristisches Polynom** von $\phi \in End_K(V):\ P_\phi = P_A, A \in K^{n \times n}$ Darstellungsmatrix von ϕ (wohldefiniert)
- $Spur(A)$ **Spur** von $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}:\ Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $U \subseteq V$ **invariant** unter $\phi \in End_K(V):\ U$ Unterraum von $V, \phi(U) \subseteq U$

Sätze

- $\phi \in End_K(V), \lambda \in K \Rightarrow\ E(\phi, \lambda)$ Unterraum von V
- $\mu \neq \lambda$ Eigenwerte zu ϕ, v_μ, v_λ Eigenvektoren $\Rightarrow\ v_\mu, v_\lambda$ linear unabhängig
- $\phi \in End_K(V), \lambda_1, .., \lambda_s$ pw. verschieden $\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{s} E(\phi, \lambda_i)$ direkte Summe
- λ Eigenwert von $A \in K^{n \times n} \Leftrightarrow\ Rang(A - \lambda \cdot E) < n$
- λ Eigenwert von $A \in K^{n \times n} \Leftrightarrow\ \lambda$ Nullstelle von P_A
- $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ Dreiecksmatrix $\Rightarrow\ P_A = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$
- $A \in K^{n \times n}, P_A = \sum_{i=0}^{n}[c_i \cdot x^i] \Rightarrow\ c_0 = det(A), c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot Spur(A), c_n = (-1)^n$
- λ Eigenwert von $\phi \in End_K(V) \Leftrightarrow\ \lambda$ Nullstelle von P_ϕ
- $\phi \in End_K(V) \Rightarrow\ Grad(P_\phi) = n, \phi$ hat max. n versch. Eigenwerte
- A Darstellungsmatrix von $\phi \Rightarrow\ P_\phi = P_A = det(A - x \cdot E)$
- U $\phi-$invariant $\Rightarrow\ \phi_{V/U} : V/U \to V/U, v + U \mapsto \phi(v) + U \in End_K(V/U)$ wohldefiniert
- $dim(V) < \infty, \phi \in End_K(V), U$ $\phi-$invarianter Unterraum von $V \Rightarrow\ P_\phi = P_{\phi_U} \cdot P_{\phi_{V/U}}$
- $M \in K^{n \times n} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in K^{r \times r}, C \in K^{s \times s} \Rightarrow\ det(M) = det(A) \cdot det(C)$

3.2 Einsetzen von Endomorphismen in Polynome

- $\phi \in End_K(V),\ f, g \in K[x],\ c \in K:$
  - $(f + g)(\phi) = f(\phi) + g(\phi)$
  - $(f \cdot g)(\phi) = f(\phi) \cdot g(\phi)$
  - $(c \cdot f)(\phi) = c \cdot f(\phi)$
- $\phi \in End_K(V),\ f \in K[x] \Rightarrow\ Kern\big(f(\phi)\big) = \{v \in V : f(\phi)(v) = 0\}$ $\phi-$invarianter Unterraum von V
- $\phi \in End_K(V),\ f_1, .., f_s \in K[x]$ teilerfremd $\Rightarrow\ Kern\big((\prod_{i=1}^{s} f_i(\phi)\big) = \bigoplus_{i=1}^{s} Kern\big(f_i(\phi)\big)$
- $\phi \in End_K(V), f_1, .., f_s \in K[x]$ teilerfremd, $(\prod_{i=1}^{s} f_i)(\phi) = 0 \Rightarrow\ V = \bigoplus_{i=1}^{s} Kern\big(f_i(\phi)\big)$

3.3 Das Minimalpolynom und der Satz von Cayley-Hamilton

- $dim(V) < \infty, \phi \in End_K(V) \Rightarrow\ P_\phi(\phi) = 0$
- $dim(V) < \infty, \phi \in End_K(V) \Rightarrow\ I = \{f \in K[x] : f(\phi) = 0\} \neq \emptyset$ Ideal, $\exists!\ m_\phi : m_\phi(\phi) = 0, \big[f \in K[x], f(\phi) = 0 \Rightarrow\ m_\phi\big|f\big], m_\phi$ normiert $\big(\Rightarrow\ I = m_\phi K[x]\big)$
  m_ϕ **Minimalpolynom** von ϕ
- **Satz von Cayley-Hamilton**: $1 \leq dim(V) = n < \infty:$

  - $m_\phi | P_\phi$
  - λ Eigenwert von $\phi \Rightarrow m_\phi(\lambda) = 0$
  - ϕ hat genau n versch. Eigenwerte $\Rightarrow m_\phi = (-1)^n \cdot P_\phi$

- $\phi \in End_K(V), U$ $\phi-$invarianter Unterraum von $V, dim(V) < \infty \Rightarrow \phi_U | m_\phi, \phi_{V/U} | m_\phi$

3.4 Diagonalisierbarkeit

Definitionen

- $\phi \in End_K(V)$ **diagonalisierbar**: $dim(V) = n, \exists A \in K^{n\times n}:$ A Darstellungsmatrix von ϕ in Diagonalgestalt
- $h \in K[x]$ **gemeinsames Vielfaches** von $f, g \in K[x]:$ $f | h, g | h$
- $h \in K[x]$ **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von $f, g \in K[x]:$ h gemeinsames Vielfaches von f, g mit minimalem Grad

Sätze

- $\phi \in End_K(V):$
  ϕ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$
  V besitzt Basis aus Eigenvektoren von ϕ $\Leftrightarrow$
  $V = \bigoplus_{i=1}^s E(\phi, \lambda_i), \lambda_1, .., \lambda_s$ die versch. Eigenwerte von ϕ $\Leftrightarrow$
  ϕ diagonalisierbar
- $\phi \in End_K(V), 1 \leq dim(V) < \infty:$ ϕ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ m_ϕ zerfällt in versch. Linearfaktoren
- $\phi \in End_K(V)$ diagonalisierbar, U $\phi-$invarianter Unterraum von $V, 0 \leq dim(U) < dim(V) < \infty \Rightarrow \phi_U, \phi_{V/U}$ diagonalisierbar
- $V = U_1 + U_2, \phi \in End_K(V), U_1, U_2 \neq 0$ $\phi-$invariant m_i Minimalpolynom von $\phi_{U_i} \Rightarrow$ m_ϕ ist das normierte kleinste gemeinsame Vielfache von m_1, m_2, $\big[\phi$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow \phi_{U_1}, \phi_{U_2}$ diagonalisierbar$\big]$
- **Simultane Transformation auf Diagonalgestalt**: $1 \leq dim(V) < \infty, F \subseteq End(V):$
  $[\phi \in F \Rightarrow \phi$ diagonalisierbar$]$, $[\phi_1, \phi_2 \in F \Rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 = \phi_2 \cdot \phi_1] \Rightarrow$
  $\exists$ Koordinatensystem, in dem alle $\phi \in F$ Diagonalgestalt annehmen

3.5 Die Jordansche Normalform

Definitionen

- A **Jordanmatrix**: $A = \begin{pmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{pmatrix}, c \in K$

- A in **Jordanscher Normalform**: $\exists A_1, .., A_r$ Jordanmatrizen: $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}$
- $H(\phi, \lambda)$ **Hauptraum** zum Eigenwert λ von $\phi:$ $m_\phi = g \cdot (x-\lambda)^r, (x - \lambda) \not| g, H(\phi, \lambda) = \big\{v \in V : (\phi - \lambda)^r(v) = 0\big\} = Kern\big((\phi-\lambda)^r\big)$
- ϕ **triangulierbar**: $\exists A$ Darstellungsmatrix von ϕ in Jordanscher Normalform

Sätze

- $H(\phi, \lambda)$ $\phi-$invarianter Unterraum von V, $m_{\phi_{H(\phi,\lambda)}} = (x - \lambda)^r$
- $\phi \in End_K(V), \lambda_1, .., \lambda_s$ die versch.Eigenwerte , m_ϕ zerfällt $\Rightarrow$ $V = \bigoplus_{i=1}^s H(\phi, \lambda_i)$
- $1 \leq dim(V) < \infty, \phi \in End_K(V), m_\phi - (x - \lambda)^r \Rightarrow$ ϕ hat Darstellungsmatrix in Jordanscher Normalform
- $\phi \in End_K(V):$
  P_ϕ zerfällt in Linearfaktoren $\Leftrightarrow$
  m_ϕ zerfällt in Linearfaktoren $\Leftrightarrow$
  ϕ kann auf Jordansche Normalform gebracht werden $\Leftrightarrow$
  ϕ kann auf Dreiecksgestalt gebracht werden
- $dim(V) \geq 1, \phi \in End(V), m_\phi = (x - \lambda)^r, A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix, $A_1, .., A_s$ Jordanmatrizen:
  - $s = dim\big(E(\phi, \lambda)\big)$
  - $A_i \in K^{n_i \times n_i}, n_i \leq r$
  - A bis auf Reihenfolge der A_i eindeutig bestimmt
  - $s_j = dim\big(Kern(\phi - \lambda)^j\big), j = 1, .., r \Rightarrow$ $t_{j+1} - t_j$ Anzahl der Jordankästchen mit min. Größe $j + 1$
- $\phi \in End(V)$ triangulierbar, $m_\phi = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{r_i}, P_\phi = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{h_i}$, $\lambda_1, .., \lambda_s$ die versch. Eigenwerte von ϕ:
  - Jordansche Normalform bis auf Reihenfolge der Jordanmatrizen eindeutig
  - # Jordanmatrizen zum Eigenwert $\lambda_i = dim\big(E(\phi, \lambda_i)\big) = n - Rang(A - \lambda_i \cdot E)$
  - $h_i = dim\big(H(\phi, \lambda_i)\big)$
  - größte Jordanmatrix zum Eigenwert λ_i ist $\in K^{r_i \times r_i}$
  - $t_i = dim\big(Kern(\phi - \lambda_i)^j\big), j = 0, .., r_i \Rightarrow$ $t_{j+1} - t_j$ Anzahl der Jordanmatrizen zum Eigenwert λ_i mit min. Größe $j + 1$

4 Euklidische und unitäre Vektorräume

4.1 Sesquilinearform

Definitionen

- $\phi : V \to W$ **semilinear mit begleitendem Automorphismus** α : $\alpha \in Aut(K), \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2), \phi(k \cdot v) = k^\alpha \cdot \phi(v)\ \forall v_1, v_2, v \in V, k \in K$
- $Kern(\phi) = \{v \in V : \phi(v) = 0\},\ Bild(\phi) = \{\phi(v) : v \in V\}$
- $s : V \times V \to K$ **Sesquilinearform mit begleitendem Automorphismus** $\alpha \in Aut(K)$:
  - $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$
  - $s(v.w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$
  - $s(k \cdot v, w) = k \cdot s(v, w)$
  - $s(v, k \cdot w) = k^\alpha \cdot s(v, w)$
- $\alpha = 1$: s **Bilinearform**
- s **nicht ausgeartet**: $s(v, w) = 0\ \forall\ w \in V \Rightarrow\ v = 0, \quad s(w, v) = 0\ \forall w \in V \Rightarrow\ v = 0$
- $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ **Darstellungsmatrix** der Sesquiliniearform $s : V \times V \to K$ mit begleitendem Automorphismus $\alpha \in Aut(K)$: $(v_1, .., v_n)$ Basis von V, $a_{ij} = s(v_i, v_j)$

Sätze

- A Darstellungsmatrix von s, x, y Koordinatenvektoren von $v, w \Rightarrow\ s(v, w) = x^T \cdot A \cdot y^\alpha$
- B_1, B_2 Koord.systeme, T Transformationsmatrix des Koord.wechsels von B_1 auf B_2, s Sesquilinearform mit Darstellungsmatrizen $A_1, A_2 \Rightarrow\ A_1 = T^T \cdot A_2 \cdot T^\alpha$
- s Sesquilinearform mit Darstellungsmatrix A : s ausgeartet $\Leftrightarrow\ det(A) = 0$

In den folgenden Abschnitten ist der Körper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

4.2 Skalarprodukte

Definition

- $\bar{c} = a - bi$ **komplex konjugierte Zahl** zu $c = a + bi$
- $^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, c \mapsto \bar{c}$ **komplexe Konjugation** $\in Aut(\mathbb{C})$
- $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$ **Betrag** von $c \in \mathbb{C}$ Sesquilinearform mit komplexer Konjugation als begleitendem Automorphismus : $s(k \cdot v, l \cdot w) = k \cdot s(v, w) \cdot \bar{l}$
- $s : V \times V \to \mathbb{C}$ **hermitesch**: $s(v, w) = \overline{s(w, v)}\ \ \forall\ v, w \in V$
- $s : V \times V \to \mathbb{R}$ **symmetrisch**: $s(v, w) = s(w, v)\ \ \forall\ v, w \in V$
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch**: $A = \overline{A^T}$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch**: $A = A^T$
- s **positiv definit**: $s(v, v) > 0\ \ \forall\ 0 \neq v \in V$
- s **Skalarprodukt** : s positiv definite, hermitesche Sesquilinearform (Schreibweise: $s(v, w) = (v, w)$
- V **euklidischer Vektorraum**: V $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt
- V **unitärer Vektorraum**: V $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt
- s **kanonisches Skalarprodukt**: $(x, y) = x^T \cdot \overline{y}$

Sätze

- A Darstellungsmatrix von s: A hermitesch $\Leftrightarrow$ s hermitesch
- s Skalarprodukt $\Rightarrow$ s nicht ausgeartet
- **Schwarzsche Ungleichung**: $(.,.) : V \to V$ Skalarprodukt $\Rightarrow$ $\left|(v, w)\right|^2 \leq (v, v) \cdot (w, w)\ \ \forall\ v, w \in V$, $\left[\left|(v, w)\right|^2 = (v, v) \cdot (w, w) \Leftrightarrow\ v, w \text{ linear abhängig}\right]$

4.3 Orthogonalität

Definitionen

- $v, w \in V$ **orthogonal**: $(v, w) = 0$
- B **Orthogonalbasis**: B Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren
- B **Orthonormalbasis**: B Orthogonalbasis aus normierten Vektoren
- $M^\perp$ **Senkrechtraum** zu M : $M^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0\ \ \forall\ w \in M\}$
- W **das orthogonale Komplement** von U in V $\Leftrightarrow$ $V = U \perp W$ $\Leftrightarrow$ $V = U \oplus W, (u, w) = 0\ \forall\ u \in U, w \in W,$
- $||v|| = \sqrt{(v, v)}$ **Länge** von $v \in V$

Sätze

- $B = \{v_1, .., v_n\}$ Orthogonalbasis, $v \in V \Rightarrow\ v = \sum_{1=1}^{n} (v, v_i) \cdot v_i$
- **Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt**: $B = \{v_1, .., v_n\}$ Basis von $V \Rightarrow \exists\{w_1, .., w_n\}$ Orthonormalbasis: $< w_1, .., w_s >=< v_1, .., v_s >\ \ \forall\ s = 1, .., n$
  - $w_1 = \frac{1}{\sqrt{(v_1, v_1}} \cdot v_1$
  - $w = v_{s+1} - \sum_{i=1}^{s} (v_{s+1}, w_i) \cdot w_i$
  - $w_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{(w,w)}} \cdot w$
- $dim(V) = n < \infty, U$ Unterraum von $V \Rightarrow\ V = U \oplus U^\perp$

- U, U_1, U_2, U_3 Unterräume von V:
  - $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$
  - $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
  - $U \subseteq U^{\perp\perp}$, $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$
  - $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$
  - $dim(V) < \infty \Rightarrow U = U^{\perp\perp}$
  - $dim(V) < \infty \Rightarrow U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$

4.4 Unitäre Abbildungen und Matrizen

Definitionen

- $\phi : V \to V$ **unitär**: V $\mathbb{C}-$Vektorraum, $\big(\phi(v), \phi(w)\big) = (v, w) \ \forall\, v, w \in V$
- $\phi : V \to V$ **orthogonal**: V $\mathbb{R}-$Vektorraum, $\big(\phi(v), \phi(w)\big) = (v, w) \ \forall\, v, w \in V$
- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **unitär** $\Leftrightarrow U \cdot \overline{U^T} = E \Leftrightarrow U \in GL(\mathbb{C}, n),\ U^{-1} = \overline{U^T}$
- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **orthogonal** $\Leftrightarrow U \cdot U^T = E \Leftrightarrow U \in GL(\mathbb{R}, n),\ U^{-1} = U^T$
- $\phi : V \to V, dim(V) = 2$ **Geradenspiegelung**: $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v \ \forall\, v \in V$
- $\phi : V \to V, dim(V) = 2$ **Drehung** um α : $\phi(v) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot v \ \forall\, v \in V$
- $\phi : V \to V, dim(V) = 2$ **Punktspiegelung**: ϕ Drehung um $\alpha = \pi$
- $U(\alpha)$ **Drehmatrix**: $U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- $U(n)$ **unitäre Gruppe**: $U(n) = \{U \in GL(\mathbb{C}, n) : U \text{ unitär } \}$
- $O(n)$ **orthogonale Gruppe**: $O(n) = \{O \in GL(\mathbb{R}, n) : O \text{ orthogonal } \}$

Sätze

- $\phi \in End_{\mathbb{C}}(V), 1 < dim(V) < \infty, U$ Darstellungsmatrix von ϕ in einem orthonormalen Koord.sys: U unitär $\Leftrightarrow$ ϕ unitär
- $dim(V) = 2, \phi \in End_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal
  - ϕ besitzt Eigenwert $\Rightarrow$ $\phi = id \vee \phi$ Punktspiegelung $\vee \phi$ Geradenspiegelung
  - ϕ besitzt keinen Eigenwert $\Rightarrow$ ϕ Drehung, Darstellungsmatrix $U(\alpha), 0 < \alpha < \pi$ in geeignetem Koord.system
- $\phi \in End_{\mathbb{C}}(V)$ unitär
  - λ Eigenwert von $\phi \Rightarrow |\lambda| = 1$
  - $dim(V) < \infty, \phi$ injektiv $\Rightarrow$ ϕ bijektiv

  - $dim(V) < \infty \Rightarrow \big(\phi(v), w\big) = \big(v, \phi^{-1}(w)\big) \ \forall\, v, w \in V$
  - v, w Eigenvektoren zu versch. Eigenwerten $\Rightarrow (v, w) = 0$
  - W $\phi-$invarianter Unterraum von $V \Rightarrow \phi_W$ unitär
  - $dim(V) < \infty, W$ $\phi-$invarianter Unterraum von $V \Rightarrow \phi(W^\perp) \subseteq W$
- V unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End_{\mathbb{C}}(V) \Rightarrow \exists\, B$ Orthonormalbasis von V : B besteht aus Eigenvektoren von ϕ (ϕ diagonalisierbar mit Diagonaleinträgen $|\lambda| = 1$)
- $f \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel $\Rightarrow Grad(f) \in \{1, 2\}$
- V euklidischer Vektorraum, $1 \leq dim(V) < \infty$, $\phi \in End_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal $\Rightarrow \exists\, W$ $\phi-$invarianter Unterraum von V, $1 \leq dim(W) \leq 2$
- V euklidischer Vektorraum, $1 \leq dim(V) = n < \infty$, $\phi \in End_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal $\Rightarrow \exists$ Koord.system: $\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & U_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & U_s \end{pmatrix}$, $a_1, .., a_r \in \{-1, 1\}, U_i = U(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $0 < \alpha_i < \pi, r + 2 \cdot s = n$ Darstellungsmatrix von ϕ, eindeutig bis auf Reihenfolge
- $V = \mathbb{C}^{n\times n}, (.,.)$ kanonisches Skalarprodukt, $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$:
  U unitär $\Leftrightarrow$
  Die Spaltenvektoren von U bilden eine Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$
  Die Zeilenvektoren von U bilden eine Orthonormalbasis
- $\phi_1, \phi_2 \in End_{\mathbb{C}}(V)$ unitär $\Rightarrow \phi_2 \circ \phi_1, \phi^{-1}$ unitär, $U(n) \leq End_{\mathbb{C}}(V)$
- $U \in U(n) \Rightarrow |det(U)| = 1$
- $U, S \in GL(\mathbb{C}, n)$ unitär $\Rightarrow U \cdot S, U^{-1}$ unitär, $\{U \in GL(\mathbb{C}, n) : U \text{ unitär } \} \leq GL(\mathbb{C}, n)$
- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär $\Rightarrow \exists\, S \in \mathbb{C}^{n\times n} : S^{-1} \cdot U \cdot S$ unitäre Diagonalmatrix
- U unitär, $\phi : V \to V, v \mapsto U \cdot v \Rightarrow \phi$ diagonalisierbar

4.5 Hermitesche Abbildungen und Matrizen

Definitionen

- $H \in K^{n\times n}$ **positiv definit**: $\overline{x}^T \cdot H \cdot x > 0 \,\forall\, x \in K^n \backslash \{0\}$
- $H \in K^{n\times n}$ **positiv semidefinit**: $\overline{x}^T \cdot H \cdot x \geq 0 \,\forall\, x \in K^n \backslash \{0\}$

Sätze

- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty$, B orthonormales Koord.system von V, $\phi \in End(V), H =_B \phi_B :$ ϕ hermitesch $\Leftrightarrow$ H hermitesch
- $\phi \in End(V)$ hermitesch, V eukl./unitärer Vektorraum:
  - λ Eigenwert von $\phi \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
  - P_ϕ zerfällt in Linearfaktoren
  - Eigenvektoren zu versch. Eigenwerten sind orthogonal
  - W $\phi-$invarianter Unterraum von $V \Rightarrow \phi_W$ hermitesch, $W^\perp$ $\phi-$invariant
- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End(V)$:
  ϕ hermitesch $\Leftrightarrow$ $\exists$ Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von ϕ, alle Eigenwerte sind reel
- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi_1, .., \phi_s \in End(V)$ hermitesch, $\phi_i \circ \phi_j = \phi j \circ \phi i \; \forall \; i, j \Rightarrow$ $\exists$ Orthogonalbasis aus Eigenvektoren aller ϕ_i
- $H_1, .., H_s \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, $H_i \cdot H_j = H_j \cdot H_i \; \forall \; i, j \Rightarrow \exists \; U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär: $U^{-1} \cdot H_i \cdot U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Diagonalmatrix $\forall \; i = 1, .., s$
- $H \in K^{n \times n}$:
  H hermitesch und positiv semidefinit $\Leftrightarrow$
  H hermitesch, alle Eigenwerte von H sind nichtnegativ $\Leftrightarrow$
  $\exists \; M \in K^{n \times n} : \; H = \overline{M^T} \cdot M$
- $H \in K^{n \times n}$:
  H hermitesch und positiv definit $\Leftrightarrow$
  H hermitesch, alle Eigenwerte von H sind positiv $\Leftrightarrow$
  $\exists \; M \in GL(K, n) : \; H = \overline{M^T} \cdot M$

4.6 Die Hauptachsentransformation

- **Hauptachsentransformation**: V $K-$Vektorraum, $dim(V) < \infty$, $f : V \times V \to K$ hermitesch, H Darstellungsmatrix von f im Koord.system $B \Rightarrow$ $\exists$ Koord.system B_0 :
  - Die Darstellungsmatrix D von f im System B_0 ist reele Diagonalmatrix.
  - Die Transformationsmatrix von B auf B_0 ist unitär.
  - Die Diagonaleinträge von D sind die Eigenwerte von H.
- **Trägheitssatz von Sylvester**: V $K-$Vektorraum, $dim(V) = n < \infty, f : V \times V \to K$ hermitesch, H Darstellungsmatrix von f im Koord.system B, k Anzahl der positiven, l Anzahl der negativen Eigenwerte von $H \Rightarrow$ k, l unabhängig von der Wahl von B
- V $K-$Vektorraum, $dim(V) < \infty, f : V \times V \to K$ hermitesch $\Rightarrow$ $\exists$ Darstellungsmatrix in Diagonalgestalt mit Einträgen $\in \{-1, 0, 1\}$, Anzahl der Einträge unabhängig vom Koord.system

4.7 Die Adjungierte

- ϕ^t **Adjungierte** zu $\phi \in End(V)$, V eukl./unitärer Vektorraum, $\big(\phi(v), w\big) = \big(v, \phi^t(w)\big) \; \forall \; v, w \in V$ (eindeutig festgelegt durch ϕ)
- $A^t = \overline{A^T}$ **Adjungierte** zu $A \in K^{n \times n}$
- A Darstellungsmatrix von $\phi \in End(V)$ in einem orthonormalen Koord.system $\Rightarrow$ A^t Darstellungsmatrix von ϕ^t
- $M, N \in K^{n \times n} \Rightarrow (M + N)^t = M^t + N^t, \; (M \cdot N)^t = N^t \cdot M^t, \; M^{tt} = M$
- $\phi_1, \phi_2 \in End(V), dim(V) < \infty \Rightarrow (\phi_2 \circ \phi_1)^t = \phi_1^t \circ \phi_2^t, \; (\phi_1 + \phi_2)^t = \phi_1^t + \phi_2^t, \; \phi^{tt} = \phi$
- $\phi \in End(V), dim(V) < \infty \Rightarrow Bild(\phi^t) = \big(Kern(\phi)\big)^\perp, \; Kern(\phi^t) = \big(Bild(\phi)\big)^\perp$
- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End(V)$:
  - ϕ injektiv $\Leftrightarrow$ ϕ^t surjektiv
  - ϕ surjektiv $\Leftrightarrow$ ϕ^t injektiv
  - ϕ bijektiv $\Leftrightarrow$ ϕ^t bijektiv

4.8 Normale Abbildungen und Matrizen

- $\phi \in End(V)$ **normal**: V eukl./unitärer Vektorraum, $\phi \circ \phi^t = \phi^t \circ \phi$
- $A \in K^{n \times n}$ **normal**: $A \cdot A^t = A^t \cdot A$
- $\phi \in End(V)$ normal $\Leftrightarrow$ Darstellungsmatrix von ϕ in einem orthonormalen Koord.system normal
- $\phi \in End(V)$ hermitesch/unitär $\Rightarrow$ ϕ normal
- $A \in K^{n \times n} \Rightarrow \; \exists! \; H_1, H_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch: $A = H_1 + i \cdot H_2, \; H_1 = \frac{1}{2}(A + A^t), \; H_2 = \frac{1}{2 \cdot i}(A - A^t)$, $\big[A$ normal $\Leftrightarrow$ $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1\big]$
- V unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End_{\mathbb{C}}(V)$:
  ϕ normal $\Leftrightarrow$
  $\exists$ Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von ϕ $\Leftrightarrow$
  $\big(\phi(v), \phi(v)\big) = \big(\phi^t(v), \phi^t(v)\big) \; \forall \; v \in V$ $\Leftrightarrow$
  ϕ normal
- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End(V)$ normal, W $\phi-$invarianter Unterraum von V:
  - W ist ϕ^t-invariant
  - $W^\perp$ invariant unter ϕ, ϕ^t
  - ϕ_W normal, $(\phi_W)^t = (\phi^t)_W$
- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End(V) \Rightarrow \; \exists \; W$ $\phi-$invarianter Unterraum von V : $dim(W) \in \{1, 2\}$

- V eukl./unitärer Vektorraum, $dim(V) < \infty, \phi \in End(V)$ normal $\Rightarrow\ \exists$ orthonormales Koord.system: $\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}$, $a_1, .., a_r \in \mathbb{R}, A_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ normale Darstellungsmatrix von ϕ

4.9 Vollständigkeit

Definitionen

- $|.| : V \to \mathbb{R}$ **Norm** auf V : V $K-$Vektorraum:
  - $|v| > 0\ \forall\ v \in V\backslash\{0\}, \big[|v| = 0 \Leftrightarrow\ v = 0\big]$
  - $|k \cdot v| = |k| \cdot |v|\ \forall\ k \in K, v \in V$
  - $|v + w| \leq |v| + |w|\ \forall\ v, w \in V$
- $(v_i)_i \subset V$ **Cauchyfolge**: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : |v_i - v_j| < \epsilon\ \forall\ i, j \geq N$
- $(v_i)_i \subset V$ **konvergiert** gegen $v \in V$: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$: $|v_i - v| < \epsilon\ \forall\ i \geq N$
- V **vollständig**: V normierter Vektorraum, in dem jede Cauchyfolge in V konvergent ist

Sätze

- $(.,.)$ Skalarprodukt auf $V \Rightarrow\ |.| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto |v| = \sqrt{(v,v)}$ Norm auf V
- $dim(V) < \infty, |.|_1, |.|_2$ Normen auf $V \Rightarrow\ \exists\ a, b \in {}^+ :\ \frac{1}{b} \cdot |v|_2 \leq |v|_1 \leq a \cdot |v|_2\ \forall\ v \in V$
- V $\mathbb{R}-$Vektorraum, $dim(V) < \infty$: $(v_i)_i$ konvergiert gegen $v \in V$ bzgl. einer Norm auf $V \Rightarrow\ (v_i)_i$ konvergiert gegen $v \in V$ bzgl. jeder Norm auf V
- Jeder endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}-$Vektorraum ist vollständig

4.10 Das vektorielle Produkt

$V = \mathbb{R}^3, (e_1, e_2, e_3)$ orthonormales Koord.system

- $v \times w$ **vektorielles Produkt**: $v = \sum_{i=1}^{3}[x_i \cdot e_i], w = \sum_{i=1}^{3}[y_i \cdot e_i], x_i, z_i \in \mathbb{R},\ v \times w = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot e_1 + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) \cdot e_2 + (x_1 \cdot Y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot e_3$
- $v_1, v_2, v_3 \in V, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:
  - $v_1 \times v_2 = -(v_2 \times v_1)$
  - $(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2) \times v_3 = a_1 \cdot (v_1 \times v_3) + a_2 \cdot (v_2 \times v_3)$
  - $(v_1 \times v_2) \times v_3 = -(v_2, v_3) \cdot v_1 + (v_1, v_3) \cdot v_2$
  - $(v_1 \times v_2) \times v_3 + (v_2 \times v_3) \times v_1 + (v_3 \times v_1) \times v_2 = 0$ (**Jacobi-Identität**)

- $u, v, w \in V,\ x, y, z$ die dazugehoerigen Koord.vektoren im Koord.system (e_1, e_2, e_3):
  - $(u \times v, w) = det(x\ y\ z)$
  - $v \times w = 0 \Leftrightarrow\ v, w$ linear unabhängig
  - $v \times w$ ist orthogonal zu v und w
- $v_1.v_2, v_3, v_4 \in V$:
  - $(v_1 \times v_2, v_3) = (v_1, v_2 \times v_3$
  - $(v_1 \times v_2, v_3 \times v_4) = (v_1, v_3) \cdot (v_2, v_4) - (v_1, v_4) \cdot (v_2, v_3)$
  - $(v_1 \times v_2, v_1 \times v_2) = |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 - (v_1, v_2) \cdot (v_2, v_1) = |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \cdot \sin^2(\alpha), \cos(\alpha) = \frac{(v_1, v_2)}{|v_1| \cdot |v_2|}$