Zusammenfassung zu Numerische Mathematik I

Sara Adams

11. August 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Numerische Mathematik I
gehalten im Wintersemester 2003/04
von Prof. Martin Buhmann (Ph.D.)
an der Justus-Liebig Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **4**
1.1 Vektornormen . . . 4
1.2 Banach-Räume, Prähilbert-Räume, Hilbert-Räume . . . 4
1.3 Spezielle Matrizen . . . 4
1.4 Matrixnormen . . . 5
1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 5
1.6 Die Landau-Notation . . . 5

2 Lineare Gleichungssysteme: Direkte Verfahren **5**
2.1 Nichtsinguläre Systeme . . . 5
2.1.1 Gauss-Elimination . . . 6
2.1.2 Cholesky-Zerlegung . . . 6
2.1.3 Nachiteration . . . 7
2.2 Singuläre Systeme . . . 7
2.2.1 Anwendung Polynomfunktionen . . . 7
2.2.2 Die $QR-$Faktorisierung/Der Gram-Smith Prozess . . . 7
2.2.3 Die Householder-Methode . . . 8

3 Eigenwertaufgaben **8**
3.1 Gerschgorin-Kreise . . . 8
3.2 Die Potenzmethode . . . 8
3.3 Deflation und Blockdeflation . . . 9
3.4 Shifts . . . 9
3.5 Inverse Iteration . . . 9
3.6 Die QR-Methode . . . 10

4 Interpolation und Approximation **10**
4.1 Lagrange-Darstellung . . . 10
4.2 Dividierte Differenzen . . . 10
4.3 Newton-Darstellung . . . 11
4.4 Fehler bei der Polynominterpolation . . . 11
4.5 Konvergenzprobleme . . . 11
4.6 Hermite-Interpolation . . . 11
4.7 Horner-Schema zur Polynomauswertung . . . 12
4.8 Splines . . . 12
4.8.1 B-Splines von $S_{X,k}$ . . . 12
4.8.2 Interpolation mit Splines . . . 12
4.8.3 Normalisierte B-Splines . . . 13

5 Integration und Quadraturformeln **13**
5.1 Newton-Cotes-Formeln . . . 13
5.2 Gauss-Quadratur . . . 14

6 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme **14**
6.1 Bisektionsverfahren . . . 14
6.2 Sekantenmethode . . . 15
6.3 Newton-Verfahren . . . 15
6.4 Fixpunktiteration . . . 15

7 Matrixiterationsverfahren **15**
7.1 Jacobiverfahren . . . 16
7.2 Gauss-Seidel-Verfahren . . . 16
7.3 Konvergenz der Verfahren . . . 16

1 Grundlagen

1.1 Vektornormen

- $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **(Vektor-)Norm** auf $\mathbb{R}^n$:
  - positiv definit: $\|x\| > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \; x = 0$
  - homogen: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
  - Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall \; x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\|.\|_p$ L_p**-Norm**: $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ ($p = 1$: **Einsnorm**, $p = 2$: **euklidische Norm**)
- $\|.\|_\infty$ **Tschebyscheff-Norm/Supremumsnorm**: $\|x\|_\infty = max_{i=1}^n |x_i|$
- **Minkowskische Ungleichung**: $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \; \forall \; 1 \leq p \leq \infty, \; x, y \in \mathbb{R}^n$
- $(x_m)_m$ **konvergiert von Ordnung** $p: \; x_m \to x \; (m \to \infty), \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\|x_{m+1}-x\|}{\|x_m-x\|^p} = \varrho, \; 0 < \varrho < \infty$ für $p > 1, \; 0 < \varrho < 1$ für $p = 1$
  - $p = 1$: lineare Konvergenz
  - $p = 2$: quadratische Konvergenz
  - $p > 1$: superlineare Konvergenz
- $\|.\|, \|.\|'$ Normen auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \; \exists \; m, M \in \mathbb{R} : \; m \cdot \|x\|' \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|' \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

1.2 Banach-Räume, Prähilbert-Räume, Hilbert-Räume

- $(X, \|.\|)$ **Banach-Raum**: $(X, \|.\|)$ normierter, vollständiger Raum
- X **Prä-Hilbert-Raum**: X $K-$Vektorraum, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, <.,.>: X \times X \to K$ inneres Produkt (bilinear, symmetrisch, definit), $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$ die vom inneren Produkt induzierte Norm
- X **Hilbert-Raum**: X vollständiger Prä-Hilbert-Raum

1.3 Spezielle Matrizen

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **rechte obere Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0 \; \forall \; i > j$
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **linke untere Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0 \; \forall \; j > i$
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Bandmatrix mit Band** $(m_l, m_r): \; a_{ij} = 0 \; \forall j < i - m_l, j > i + m_r$
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Tridiagonalmatrix**: A Bandmatrix mit Band (1,1)
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Diagonalmatrix**: A Bandmatrix mit Band (0,0)
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **diagonaldominant**: $\sum_{i=1, i\neq j}^n |a_{ij}| \leq |a_{jj}| \; \forall \; 1 \leq j \leq n$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch**: $A^T = A$
- $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Einheitsmatrix**: I Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen 1
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in **Hessenbergform**: A Bandmatrix mit Band (1,n)

1.4 Matrixnormen

- $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ **verträglich mit der Vektornorm** $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ **Matrixnorm**: $\|.\|$ verträglich mit einer Vektornorm, $\|.\|$ submultiplikativ ($\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\| \; \forall \, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$)
- $\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ **Frobeniusnorm**: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \; \forall \, A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ **Zeilensummennorm**: $\|A\|_\infty = max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (verträglich mit der Tschebyscheff-Norm $\|.\|_\infty$)
- $\|.\|_1 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ **Spaltensummennorm**: $\|A\|_1 = max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (verträglich mit der Einsnorm $\|.\|_1$)
- $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\cdot x\|}{\|x\|} = sup_{\|x\|=1} \|A \cdot x\|$ Matrixnorm (verträglich mit der Vektornorm $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- $cond(A)$ **Kondition** von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

- $\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\exists \, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n : \; A \cdot v = \lambda \cdot v$
- $v \neq 0$ **Eigenvektor zum Eigenwert** λ von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A \cdot v = \lambda \cdot v$
- $\sigma(A)$ **Spektrum** von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ Eigenwert von $A\}$
- $\varrho(A)$ **Spektralradius** von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\varrho(A) = max\big(\sigma(A)\big)$
- P_A **charakteristisches Polynom**: $P_A(x) = det(A - x \cdot I)$
- λ **algebraisch vielfacher Eigenwert** von A : λ mehrfache Nullstelle von $P_A(x)$
- λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \; P(\lambda) = 0$

1.6 Die Landau-Notation

- $f(t) = O\big(g(t)\big), t \to a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \; \frac{|f(t)|}{|g(t)|} \leq c, t \to a$
- $f(t) = o\big(g(t)\big), t \to a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \; \frac{|f(t)|}{|g(t)|} \to 0, t \to a$

2 Lineare Gleichungssysteme: Direkte Verfahren

2.1 Nichtsinguläre Systeme

$\boxed{A = (a_{ij}) \in GL(\mathbb{R}, n), \; b \in \mathbb{R}^n \text{ gegeben, gesucht: } x \in \mathbb{R}^n : \; A \cdot x = b}$

- A rechte obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ Lösung durch Rückwärtseinsetzen:
  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}$ usw.

- Mit geeigneter Permutationsmatrix P kann $P \cdot A = L \cdot R$ faktorisiert werden, so dass L linke untere Dreiecksmatrix, R rechte obere Dreiecksmatrix

2.1.1 Gauss-Elimination

Gauss-Elimination:
$det(A) \neq 0, A \cdot x = b \Rightarrow R \cdot x = \widetilde{b}$, R rechte obere Dreiecksmatrix durch Transformationen:

- Addition des $k-$fachen ($k \neq 0$) einer Zeile zu einer anderen
- Zeilenvertauschungen (**Pivotierungen**)

Der Algorithmus:

- $A^{(0)} = A, b^{(0)} = b$
- Bestimme $r \in \{1, .., n\}$: $a_{r1}^{(0)} = max_{i=1}^n |a_{i1}|$, (a_{r1} **Pivotelement**) (eigtl. nur $a_{r1} \neq 0$ benötigt, mit maximalem a_{r1} numerisch stabiler)
- Vertausche r. und 1. Zeile $\Rightarrow \widetilde{A}^{(0)}, \; \widetilde{b}^{(0)}$
- Addiere das $q_{i1}-$fache der 1. Zeile zu der i.ten Zeile, $q_{i1} = -\frac{\widetilde{a_{i1}}^{(0)}}{\widetilde{a_{11}}^{(0)}}, \; 2 \leq i \leq n \quad \Rightarrow A^{(1)}, \; b^{(1)}$
- Wiederhole den Algorithmus mit der Untermatrix $(a_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}, 2 \leq i, j \leq n$

Eigenschaften:

- $A = L \cdot R$ Bandmatrix, Gauss-Elimination ohne Pivotierungen durchführbar $\Rightarrow \; L, R$ Bandmatrizen mit gleicher Struktur wie A
- A diagonaldominant $\Rightarrow$ Gauss-Elimination ohne Pivotierungen durchführbar
- A symmetrisch, positiv definit $\Rightarrow$ Gauss-Elimination ohne Pivotierungen durchführbar
- $LR-$Zerlegung einer nichtsingulären Matrix bis auf Pivotierungen eindeutig

2.1.2 Cholesky-Zerlegung

Cholesky-Zerlegung:
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit, suche Zerlegung $A = L \cdot L^T, \; L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linke untere Dreiecksmatrix: $\sum_{k=1}^i {l_{ik}}^2 = a_{ii}, \sum_{k=1}^i l_{jk} \cdot l_{ik} = a_{ji} \; \forall \, j < i, \;\; i = 1, .., n$

- $A \in K^{n\times n}, K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \; A = \overline{A^T} \Rightarrow \; \|A\|_2 = \varrho(A)$
- $B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \|B\| < 1 \Rightarrow \; I + B \in GL(\mathbb{R}, n), \; \|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$
- $A \in GL(\mathbb{R}, n), \; \|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \; \widetilde{A} = A + \delta A \in GL(\mathbb{R}, n), \big[\widetilde{A} \cdot (x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \big(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \big) \big]$ $\;[\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ **relative Fehler**$]$

2.1.3 Nachiteration

Nachiteration: Löse $A \cdot x = b$:

- $A = L \cdot R$ $LR-$Zerlegung
- $L \cdot (R \cdot x) = b \Rightarrow$ Löse $L \cdot c = b$ durch Vorwärtseinsetzen
- Löse $R \cdot x = c$

Bei Computerberechnungen sind genaue Berechnungen meist nicht möglich:

- $A \approx L \cdot R$, bestimme $x^{(0)} \approx x$
- $d^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$ **Defekt**
- Löse die **Defektgleichung** $A \cdot k = d^{(0)} \Rightarrow\ k^{(1)} \approx k$
- $x^{(1)} = x^{(0)} + k^{(1)}$ usw.

2.2 Singuläre Systeme

$\boxed{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m \text{ gegeben, gesucht: } x \in \mathbb{R}^n:\ A \cdot x = b}$

- $m \geq n$: **überbestimmtes Gleichungssystem**
- $A^T \cdot A \cdot \overline{x} = A^T \cdot b$ **Normalengleichung**

Ziel: Minimierung des Defekts bzgl. $\|.\|_2 :\ \|A \cdot \overline{x} - b\|_2 = min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot x - b\|_2$

- $\forall\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m > n\ \exists\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n:\ \|A \cdot \overline{x} - b\|_2 = min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot x - b\|_2,\ \left[Rang(A) = n \Rightarrow\ \overline{x}\right.$ eindeutig$\left.\right]$
- $\overline{x}$ löst Normalengleichung $\Rightarrow\ \|A \cdot \overline{x} - b\|_2 = min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot x - b\|_2$

2.2.1 Anwendung Polynomfunktionen

Anwendung Polynomfunktionen: $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x^{i-1}$, Daten $(x_1, y_1), .., (x_m, y_m)$

$\Rightarrow$ Löse $A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, A = ({x_i}^{k-1})_{i=1}^{m}\ {}_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Gilt: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n, Rang(A) = n \Rightarrow\ A^T \cdot A \in GL(\mathbb{R}, n)$ positiv definit

2.2.2 Die $QR-$Faktorisierung/Der Gram-Smith Prozess

QR-Faktorisierung: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n, Rang(A) = n \Rightarrow\ \exists!\ Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $Q^T \cdot Q = I_n, A = Q \cdot R, R$ rechte obere Dreiecksmatrix

Der Gram-Smith-Prozess zum Ermitteln von $Q = (q_1\ ..\ q_n)$:

- $A = (a_1\ ..\ a_n), a_i \in \mathbb{R}^m$
- $\widetilde{q}_1 = a_1,\ q_1 = \frac{\widetilde{q}_1}{\|\widetilde{q}_1\|}$
- $\widetilde{q}_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \left[(a_{k+1}, q_i) \cdot q_i\right],\ q_{k+1} = \frac{\widetilde{q}_{k+1}}{\|\widetilde{q}_{k+1}\|}$ $(k = 1, .., n-1)$

$\Rightarrow\ R = (r_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : r_{kk} = \|\widetilde{q}_k\|,\ r_{kj} = (a_k, q_j)$ für $k \neq j$

2.2.3 Die Householder-Methode

Householder-Methode: Finde orthonormale $H_1, .., H_{n-1}:\ H_{n-1} \cdot .. \cdot H_1 \cdot A = R$ rechte obere Dreiecksmatrix

- $A = (a_1\ ..\ a_n),\ a_i \in \mathbb{R}^m$
- $\alpha = \pm\|a_1\|,\ u = \frac{a_1 - \alpha \cdot e_1}{\|a_1 - \alpha \cdot e_1\|} \Rightarrow\ H_1 = I - 2 \cdot u \cdot u^T$
  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ u \cdot u^T = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_1 \cdot u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n \cdot u_1 & \dots & u_n \cdot u_n \end{pmatrix}$
- $H_k,\ k = 2, .., n-1$ ähnlich

3 Eigenwertaufgaben

$\|.\|$ Matrixnorm, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda$ Eigenwert von A, kein Eigenwert von B
$\Rightarrow\ \|(\lambda \cdot I - B)^{-1} \cdot (A - B)\| \geq 1$

3.1 Gerschgorin-Kreise

Gerschgorin-Lemma: $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\exists\ j \in \{1, .., n\} : \lambda \in K_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}|\}$
- $U = \bigcup_{i=1}^m K_{j_i}, V = \overline{\bigcup_{j=1}^n K_j \backslash U}, U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ es liegen genau m Eigenwerte in U und genau $(n-m)$ Eigenwerte in V (algebraischen Vielfachheit beachten)

Gilt: $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor $\Rightarrow\ \lambda = r(v) = \frac{(A \cdot v, v)}{\|v\|^2}$ ($r(v)$ **Rayleigh-Quotient**)

3.2 Die Potenzmethode

Potenzmethode: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x_1 \in \mathbb{R}^n, w_1, .., w_n$ linear unabhängige Eigenvektoren, $|\lambda_1| \leq .. \leq \|\lambda_n\|,\ \lambda_i$ Eigenwerte:

- $x_1 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot w_i,\ x_{k+1} = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot (\lambda_i)^k \cdot w_i$
- m größter Index mit $\vartheta_m \neq 0,\ |\lambda_{m-1}| < |\lambda_m|$
  - Jedes x_{k+1} ist ein Vielfaches von $\sum_{i=1}^m \vartheta_i \cdot (\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^k \cdot w_i \to \vartheta_m \cdot w_m$ $(k \to \infty)$
  - $v_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|}$
  - $v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, v_{k+1} = \frac{A \cdot v_k}{\|A \cdot v_k\|}, \|A \cdot v_k\| \to |\lambda_m|$ $(k \to \infty)$
  - $A \cdot v_k \approx A \cdot w_m = \lambda_m \cdot w_m$
- $\Rightarrow\ |\lambda_m|, w_m$ gefunden
- Zum Finden eines anderen Eigenwerts:
  - Wähle anderen Startvektor mit $\vartheta_r \neq 0, |\lambda_r| > |\lambda_m|$

- Betrachten einer Matrix $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$, die außer λ_m die gleichen Eigenwerte wie A hat (**Deflation**)
- Spezialfall **Eigenwerte gleichen Betrags**

Eigenwerte gleichen Betrags: $|\lambda_1| \leq .. \leq |\lambda_{n-1}| = |\lambda_n|$

- Sei $x_1 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot w_i,\ \vartheta_{n-1} \neq 0 \neq \vartheta_n$ Startvektor
- $x_{k+1} = A \cdot x_k = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot \lambda_i^k \cdot w_i$
- $v_k = \frac{x_k}{\|x_k\|} \to v \in < w_{n-1}, w_n >$
- $\exists\ a_k, b_k \in \mathbb{R}:\ \|v_{k+2} - a_k \cdot v_k - b_k \cdot v_{k+1}\| \to 0\ (k \to \infty)$
- Suche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ A^2 \cdot v_k \approx \alpha \cdot v_k - \beta \cdot v_{k+1}$
- Eigenwerte als Lösungen von $\lambda^2 = \alpha + \beta \cdot \lambda$ suchen
- Eigenvektor zu λ_n: Suche $p, q \in \mathbb{R}:\ w_n = p \cdot v_k + q \cdot A \cdot v_k$:
$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
- Eigenvektor zu λ_{n-1}: entsprechend mit λ_{n-1}

3.3 Deflation und Blockdeflation

Deflation: λ_1, w_1 bereits berechneter Eigenwert, -vektor:

Suche $S \in GL(\mathbb{R}, n):\ S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\ \sigma(A) = \{\lambda_1\} \cup \sigma(B)$:

$S \cdot A \cdot S^{-1}$ hat die gewünschte Form, falls $S \cdot w_1 = r \cdot e_1, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Blockdeflation: $v_1, .., v_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, $A \cdot v_j \in span\{v_1, .., v_m\}$:

Suche $S \in \mathbb{R}^{n \times n}:\ S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix},\ C \in \mathbb{R}^{m \times m}, D \in \mathbb{R}^{m \times n-m}, B \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$:

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die gewünschte Form, falls die letzten $n-m$ Komponenten von $S \cdot v_j$ für $1 \leq j \leq m$ verschwinden

3.4 Shifts

Shifts: dient der Beschleunigung der Konvergenz
Bsp. Standard-Potenz-Methode:
$x_1 \in \mathbb{R}^n$ Startvektor $\Rightarrow\ x_{k+1} = (A - s \cdot I) \cdot x_k,\ s$ Shift
etwa: $0 < |\lambda_1| \leq .. \leq |\lambda_m| \ll |\lambda_{m+1}| \leq .. \leq |\lambda_n| \Rightarrow\ s \approx \frac{|\lambda_1| + |\lambda_m|}{2}$ geeignet

3.5 Inverse Iteration

Inverse Iteration: s Schätzung des kleinsten Eigenwerts: $0 < |\lambda_1 - s| < |\lambda_2 - s| \leq .. \leq |\lambda_n - s|$, x_1 Startvektor: $x_{k+1} = (A - s \cdot I)^{-1} \cdot x_k$ (s kein Eigenwert!), $v_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}$
$\Rightarrow\ \|A \cdot v_k\| \to |\lambda_1|\ (k \to \infty),\ v_k \to w_1\ (k \to \infty)$
$\big($löse in jeden Schritt das LGS $(A - s \cdot I) \cdot x_{k+1} = x_k\big)$

3.6 Die QR-Methode

QR-Methode:

- $A_1 = A = Q_1 \cdot R_1$
- $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k = Q_{k+1} \cdot R_{k+1}$
- $\overline{Q}_k = Q_1 \cdot .. \cdot Q_k, \overline{R}_k = R_k \cdot .. \cdot R_1$
- $\overline{Q}_k \cdot \overline{R}_k = A^k, A_{k+1} = \overline{Q}_k^{-1} \cdot A_k \cdot \overline{Q}_k$

Habe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $w_1, .., w_n$, $|\lambda_1| \leq .. < |\lambda_n|$ seien die Eigenwerte, $e_1 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot w_i, \vartheta_n \neq 0$
$\Rightarrow$ die erste Spalte von A_k konvergiert gegen $\lambda_n \cdot e_1\ (k \to \infty)$

Habe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $w_1, .., w_n$, $|\lambda_1| < |\lambda_2 \leq .. < |\lambda_n|$ seien die Eigenwerte, $e_1 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot w_i, \vartheta_1 \neq 0$
$\Rightarrow$ die letzte Zeile von A_k konvergiert gegen $\lambda_1 \cdot e_n^T\ (k \to \infty)$

Habe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n linear unabhängige Eigenvektoren $w_1, .., w_n$, $|\lambda_1| < .. < |\lambda_n|$ seien die Eigenwerte, $e_1 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \cdot w_i, \vartheta_n \neq 0$
$\Rightarrow$ alle Elemente unterhalb der Diagonalen von A_k konvergieren gegen 0

QR-Methode mit Shifts: $(A_1 - s_1 \cdot I) = Q_1 \cdot R_1, (A_k - s_k \cdot I) = Q_k \cdot R_k, A_{k+1} = R_k \cdot Q_k, s_i \in \mathbb{R}$
besonders schnelle Konvergenz, wenn A Hessenbergform hat (symm. Hessenbergform: Tridiagonalmatrix)

4 Interpolation und Approximation

$x_0, .., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $y_0, .., y_m \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \exists!\ p \in \mathbb{P}:\ Grad(p) = m,\ p(x_i) = y_i, i = 0, .., m$

4.1 Lagrange-Darstellung

Lagrange-Darstellung: $x_0, .., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $y_0, .., y_m \in \mathbb{R}$:

- $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{P}^m$
- $p(x) = \sum_{i=0}^m \big[y_i \cdot L_i(x)\big] \in \mathbb{P}^m,\ p(x_i) = y_i, i = 0, .., m$

4.2 Dividierte Differenzen

Dividierte Differenzen: $x_0, .., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $f(x_0), .., f(x_m) \in \mathbb{R}$:

- $f[x_i] = f(x_i)$
- $f[x_0 \,..\, x_k] = \frac{f[x_1 \,..\, x_k] - f[x_0 \,..\, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

Seien $x_0, .., x_{n+1} \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $f(x_0), .., f(x_{n+1}) \in \mathbb{R}$:

- $f[x_1 \,..\, x_k] = f[x_{\pi(1)} \,..\, x_{\pi(k)}]\ \ \forall \pi \in \Sigma_k, 1 \leq k \leq n+1$

- $f[x_0 \,..\, x_{n+1}] = 0 \;\; \forall f \in \mathbb{P}^n$
- $f \in C\big([a,b]\big), a < x_0 < .. < x_n < b \Rightarrow \;\exists\, \xi \in [a,b]: \;f[x_0 \,..\, x_n] = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi)$
- $f[\underbrace{x_i \,..\, x_i}_{(n+1)-\text{mal}}] = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_i)$, falls f in x_i $n-$mal differenzierbar

$g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow \;(gh)[y_0..y_l] = \sum_{i=0}^{l} g[y_0..y_i]h[y_i..y_l]$

4.3 Newton-Darstellung

Newton-Darstellung: $x_0, .., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $f(x_0), .., f(x_m) \in \mathbb{R}$:

- $N_0(x) = 1, \;N_i(x) = \prod_{j<i}(x - x_j) \in \mathbb{P}^i$
- $p(x) = \sum_{i=0}^{m}\big[a_i \cdot N_i(x)\big], \;a_i = f[x_0, .., x_i]$

4.4 Fehler bei der Polynominterpolation

Fehler bei der Polynominterpolation: $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in \;C^{m+1}\big([a,b]\big), \;x_0, .., x_m \in (a,b)$ paarweise verschieden, $p \in \mathbb{P}^m : p(x_i) = f(x_i), x \in [a,b], x \neq x_i, i = 0, .., m$:

- $\big|f(x) - p(x)\big| = \big|f[x_0 \,..\, x_m \; x] \cdot \prod_{j=0}^{m}(x - x_j)\big|$
- $f \in C^{m+1}\big([a,b]\big) \Rightarrow \;\exists\, \xi \in (a,b): \;f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot \prod_{j=0}^{m}(x - x_j)$
- $f(x) - p(x) = \int_0^1 \int_0^{t_1} .. \int_0^{t_m} f^{(m+1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{m}\big[t_i \cdot (x_i - x_{i-1})\big] + t \cdot (x - x_m)\mathrm{d}t_m..\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t$

4.5 Konvergenzprobleme

Konvergenz: Im Allgemeinen gilt: $p_m \not\to f$ gleichmässig $(m \to \infty)$

Satz von Weierstraß: Jedes $f \in C\big([a,b]\big)$ kann durch ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ beliebig nahe gleichmässig genähert werden

4.6 Hermite-Interpolation

Hermite-Interpolation: $x_0, .., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $y_0^{(0)}, .., y_0^{(\mu_0)}, .., y_m^{(0)}, .., y_m^{(\mu_m)} \in \mathbb{R}$. Wir suchen ein Polynom $p \in \mathbb{P}^n : \;p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \;0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \mu_i, n = m + \sum_{i=1}^{m} \mu_i$

- Das obige Problem hat eine eindeutige Lösung.
- $p(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{r=1}^{\mu_i+1} f[\underbrace{x_0..x_0}_{\mu_0+1} \dots \underbrace{x_{i-1}..x_{i-1}}_{\mu_{i-1}+1}\underbrace{x_i..x_i}_{r}](x - x_i)^{r-1} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)^{\mu_j+1}$
- Fehler: $f(x) - p(x) = f[\underbrace{x_0..x_0}_{\mu_0+1} \dots \underbrace{x_m..x_m}_{\mu_m+1} x] \prod_{j=0}^{m}(x - x_j)^{\mu_j+1}, \;x \in [a,b]$

4.7 Horner-Schema zur Polynomauswertung

Horner-Schema: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$: Berechne $p(\xi)$ ohne Berechnung der ξ^i

- $b_n := a_n, b_{k-1} := a_{k-1} + \xi b_k, k = 1, .., n \Rightarrow \;b_0 = p(\xi)$
- $p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} \Rightarrow \;p'(\xi) = p_{n-1}(\xi)$

4.8 Splines

$X = \{x_0, .., x_m\}, x_0 < .. < x_m, \;k \in \mathbb{N}$:

- $s : [x_0, x_m] \to \mathbb{R}$ **Spline** vom Grad k: $s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^k, 0 \leq i \leq m, \;s \in C^{k-1}\big([x_0, x_m]\big)$
- $S_{X,k}$ **Menge aller Splines** vom Grad k auf der Knotenmenge X:
  $S_{X,k} = \Big\{s : [x_0, x_m] \to \mathbb{R} : s \in C^{k-1}\big([x_0, x_m]\big), \;s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^k, 0 \leq i \leq m\Big\}$
- $dim(S_{X,k}) = k + m$
- **abgeschnittene Potenzfunktion**: $(x - x_i)_+^k = \begin{cases} (x - x_i)^k & \text{für } x > x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

4.8.1 B-Splines von $S_{X,k}$

$B_j^k(x) = \sum_{l=j}^{j+k+1} d_l^j (x - x_l)_+^k, \;j \in \{-k, .., m\}$ durch Hinzufügen von Knoten $x_{-k}, .., x_{-1}, x_{m+1}, .., x_{m+k}$

- $d_l^j = \prod_{i=j, i\neq l}^{j+k+1} \frac{1}{x_l - x_i}$
- Die B-Splines $B_{j|[x_0, x_m]}^k, j \in \{-k, .., m\}$ bilden eine Basis von $S_{X,k}$
- B_j^k hat keine Nullstellen innerhalb seines Trägers $[x_j, x_{j+k+1}]$.
- $B_j^k(x) = \frac{(x - x_j)B_j^{k-1}(x) + (x_{j+k+1} - x)B_{j+1}^{k-1}(x)}{x_{j+k+1} - x_j}$ **Rekursionsformel**
- **weitere B-Splines**: $\widetilde{B_j^k} = h_x[x_j..x_{j+k+1}], \;h_x(z) = (z - x)_+^k$

4.8.2 Interpolation mit Splines

$y_1 < .. < y_{m+k}, z_1, .., z_{m+k}$ gegeben. Wir suchen $s \in S_{X,k} : \;s(y_i) = z_i \;\forall i = 1, .., m + k$

- $s(x) = \sum_{i=-k}^{m-1} \lambda_i B_i(x), A := \big(B_j(y_i)\big)_{j=-k, i=1}^{m-1, m+k} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+k)}$
- Interpolationsproblem eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
- **Schoenberg-Whitney**: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \;B_{j-k-1}(y_j) \neq 0 \;\forall j = 1, .., m + k$
- Fehler: $f \in \mathcal{C}([a,b]), h$ maximaler Knotenabstand
  $\Rightarrow \;\exists s \in S_{X,k} : \;||f - s||_\infty \leq \omega_f\big(\frac{h}{2}(k+1)\big), \;\omega_f(\delta) := \max_{x,y \in [a,b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$
- $f \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow \;\omega_f \xrightarrow{\delta \to 0} 0$

- $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2, h = \max_{0\le i\le m-1} |x_{i+1} - x_i| \Rightarrow \exists s \in S_{X,k} : ||s - f||_\infty \le \frac{1}{4}k(k+1)h^2||f''||_\infty$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^r, k \ge r-1,\ h = \max_{0\le i\le m-1} |x_{i+1} - x_i| \Rightarrow \exists s \in S_{X,k} : ||f - s||_\infty \le (\frac{h}{2})^r \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!}||f^{(r)}||_\infty$

4.8.3 Normalisierte B-Splines

$N_j(x) := (x_{j+k+1} - x_j)B_j(x)$

- $\sum_{j=-k}^{m-1} N_j(x) = 1\ \forall x \in [x_0, x_m]$

5 Integration und Quadraturformeln

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig: Berechnung von $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

5.1 Newton-Cotes-Formeln

$x_1, .., x_m \in [a,b]$ äquidistante Knoten $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^m \lambda_j f(x_j)$
$a < x_1, x_m < b \Rightarrow$ offene Formel
$x_1 = a, x_m = b \Rightarrow$ geschlossene Formel

1. **Mittelpunktsregel** $m = 1 :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$
2. **Trapezregel** $m = 2, h = b - a :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\big(f(b) - f(a)\big)$
3. **Simpsonregel** $m = 3, h = \frac{b-a}{2} :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big)$

Es gilt: $f \in \mathbb{P}^{m-1} \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^m \lambda_j f(x_j)$

Restglieder:

1. $f \in \mathbb{C}^2([a,b]) \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$
2. $f \in \mathbb{C}^2([a,b]) \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(x)\big) - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$
3. $f \in \mathbb{C}^4([a,b]) \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] :\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big) - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$

Zusammengesetzte Regeln:
Unterteile $[a,b]$ in l Teilintervalle $[a+ih, a+(i+1)h], i = 0, .., l-1, a + lh = b$ $(h = \frac{b-a}{l})$.
Wende nun auf den Teilintervallen eine Integrationsregel an:

1. **Zusammengesetzte Mittelpunktsregel**: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \sum_{j=1}^l f\big(a + (j - \frac{1}{2})h\big)$
2. **Zusammengesetzte Trapezregel**: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\big(f(a)+2\sum_{j=2}^l f(a+(j-1)h)+f(b)\big)$
3. **Zusammengesetzte Simpsonregel**: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\big(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=2}^l f(a + (j - 1)h) + 4\sum_{j=1}^l f(a + (j - \frac{1}{2})h)\big)$

5.2 Gauss-Quadratur

Orthogonale Polynome:
$(.,.) : \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ inneres Produkt auf $\mathcal{C}([a,b])$:
$(p_i)_i$ System orthogonaler Polynome (OPS) $:\Leftrightarrow\ p_i \in \mathbb{P}^i :\ (p_i, q) = 0\ \forall q \in \mathbb{P}^{i-1}$

3-Term-Rekursionsformel: $p_{n+1}(x) = (x - a_n)p_n(x) - b_n p_{n-1}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$,
wobei $p_{-1} \equiv 0, p_0 \equiv 1$ und $a_n = \frac{(p_n, xp_n)}{(p_n, p_n)}, b_n = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$

Schritte zur Gauss-Quadratur:

1. Wahl von $n \in \mathbb{N}$ ($\Rightarrow$ Formel exakt für $f \in \mathbb{P}^{2n+1}$)
2. Berechnung der Knoten x_i:
   - inneres Produkt $(g,h) := \int_a^b \omega(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x$
   - mit 3-Term-Rekursion orthogonale Polynome $p_i, i = 0, .., n+1$ bestimmen
   - x_i sind die Nullstellen von p_{n+1}
3. λ_i berechnen: z.B.durch $\int_a^x \omega(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^n \lambda_j q(x_j)\ \forall q \in \mathbb{P}^n$
4. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$

Beachte: $\omega(x)$ positiv definit bis auf endlich viele Nullstellen, $x_i \in [a,b], x_i$ paarweise verschieden, $\lambda_i > 0\ \forall i$

Typische OPS:

- Legendre-Polynome: $a = -1, b = 1,\ \omega(x) \equiv 1$
- Tschebyscheff-Polynome: $a = -1, b = 1,\ \omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Hermite-Polynome: $a = -\infty, b = \infty,\ \omega(x) = e^{-x^2}$
- Laguerre-Polynome: $a = 0, b = \infty,\ \omega(x) = e^{-x}x^\alpha$

Fehler bei der Gauss-Quadratur:
$f \in \mathbb{C}^{2n+2}(a,b) \Rightarrow \int_a^b \omega(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}c_n,\ \xi \in (a,b), c_n > 0$ konstant

6 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$. Wir suchen $x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = b$. Problem: Nullstellenbestimmung

6.1 Bisektionsverfahren

Wir bestimmen eine Nullstelle im Intervall $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$, wobei $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ gelten soll.

1. $x_t := \frac{a_t + b_t}{2}$
2. $\begin{cases} f(a_t)f(x_t) < 0 & \Rightarrow\ a_{t+1} := a_t, b_{t+1} = x_t \\ f(a_t)f(x_t) > 0 & \Rightarrow\ a_{t+1} := x_t, b_{t+1} = b_t \end{cases}$
3. $t \to\ t+1$, GOTO 1.

Abbruchkriterium: $f(x_t) = 0$ oder $|f(x_t)| < \varepsilon$ (langsame Konvergenz!)

6.2 Sekantenmethode

$n=1:\ x_{t+1} = x_t - f(x_t)\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t)-f(x_{t-1})}$, falls $f(x_t) \neq f(x_{t-1})$
Konvergenz: $|x_t - x^*| \le c \cdot \varrho^{\gamma_t},\ \gamma_t$ Fibonacci-Zahlen

6.3 Newton-Verfahren

Newton-Verfahren in $\mathbb{R}$:
$f \in \mathcal{C}([a,b]), x_0 \in (a,b)$ Startwert $\Rightarrow\ x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)},\ t \in \mathbb{N}_0$

Nachteil: Nur anwendbar, falls $f'(x_k) \neq 0\ \forall k$
Vorteil: quadratische Konvergenz

Newton in $\mathbb{R}^n$:
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ Startwert $\Rightarrow\ x_{t+1} = x_t - (\nabla f(x_t))^{-1}$, falls $\nabla f(x_t)$ regulär

$0 < m, M < \infty:\ ||\nabla f(x)||^{-1} \le \frac{1}{m}, ||\nabla f(x)|| \le M \Rightarrow\ \exists \varepsilon > 0:\ \big[||x_0 - x^*||\varepsilon \Rightarrow\ x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^*$ quadratisch$\big]$

Vereinfachtes Newton-Verfahren:
$n=1:\ x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_0)} \Rightarrow$ lineare Konvergenz

6.4 Fixpunktiteration

$f: X \to X:\ x^*$ Fixpunkt $:\Leftrightarrow\ f(x^*) = x^*$
Suche also Fixpunkt x^* der Funktion $f(x) := g(x) + x \Rightarrow\ g(x^*) = 0$

$x_0 \in X, x_1 = f(x_0), x_{k+1} = f(x_k):\ x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$

Voraussetzungen für die Fixpunktiteration:

- X Banachraum mit Norm $||.||:\ f: X \to X$ **Kontraktion** $:\Leftrightarrow\ \exists q < 1:\ ||f(x) - f(x)|| \le q||x-y||\ \forall x,y \in X$
- Banach'scher Fixpunktsatz: X Banachraum, f Kontraktion $\Rightarrow\ \exists!\ x^*$ Fixpunkt von $f,\ x^* = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$, wobei $x_k = f(x_{k-1}),\ x_0 \in X$ beliebig
- $\emptyset \neq G \subset X$ abgeschlossen, f kontrahierend auf $G \Rightarrow\ \exists!\ x^*$ Fixpunkt von $f,\ x^* = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$, wobei $x_k = f(x_{k-1}),\ x_0 \in G$ beliebig (Beachte: $f(G) \subset G$ nötig)
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n, x_{k+1} = f(x_k), k \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0:\ f_{|\overline{B_\varepsilon(x_0)}}$ kontrahierend $\Rightarrow\ (x_k)_k \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)},\ \exists!\ x^* \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}:\ f(x^*) = x^*,\ x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$

Folgerung:
$A: X \to X$ kontrahierende Abbildung, X Banachraum $\Rightarrow\ \exists\ (I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n$

7 Matrixiterationsverfahren

Wir wollen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen. Für große n ist die Gausselimination zu langsam. Suche also iterative Näherungsverfahren:
Schreibe $A = P - N$, wobei P eine "einfachere" Matrix darstellt:
$x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow\ x_{k+1} = P^{-1}Nx_k + P^{-1}b \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

7.1 Jacobiverfahren

$P = D$ Diagonale von A:
Sei $A = L + D + R, L$ linke untere, R rechte obere Dreiecksmatrix $\big(N = -(L+R)\big)$
$x_{k+1} = Hx_k + D^{-1}b,\ H = -D^{-1}(L+R)$

7.2 Gauss-Seidel-Verfahren

Sei $x_k = (x_k)_{i=1}^n, b = (b)_{i=1}^n, A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$:
$(x_{k+1})_j = -\frac{1}{a_{jj}}\big(\sum_{m=1}^{j-1} a_{jm}(x_{k_1})_m + \sum_{m=j+1}^n a_{jm}(x_k)_m - b_j\big)$
$\Rightarrow\ x_{k+1} = Hx_k + (D+L)^{-1}b,\ H = -(D+L)^{-1}R$

7.3 Konvergenz der Verfahren

Unter welchen Bedingungen an H konvergiert $x_{k+1} = Hx_k + c$ gegen $x:\ Ax = b$?
Entscheidend ist der Spektralradius $\varrho(H) = \max\{|\lambda|:\ \lambda$ Eigenwert von $H\}$

- $B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \varepsilon > 0 \Rightarrow\ \exists\ ||.||_\varepsilon$ Norm: $\varrho(B) \le ||B||_\varepsilon \le \varrho(B) + \varepsilon$
- $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär, $b \in \mathbb{R}^n,\ x_{k+1} := (I - P^{-1}A)x_k + P^{-1}b$:
  $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x:\ Ax = b\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow\ \varrho(H) < 1$

Abbruchkriterium: $||Ax_k - b|| < \varepsilon$
Problem: Falls $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ groß ist, bietet dies keine guten Resultate:
$\frac{||Ax_k - b||}{||b||} \cdot cond(A) \approx \frac{||x_k - x||}{||x||}$ verfälscht bei zu großer $cond(A)$!
Starkes Zeilensummenkriterium:
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllt das starke Zeilensummenkriterium (ZSK) $:\Leftrightarrow\ \sum_{k=1,k\neq i}^n |a_{ik}| \le |a_{ii}|\ \forall i = 1,..,n$ ($\Leftrightarrow\ A$ diagonaldominant)

A diagonaldominant $\Rightarrow$ Gauss-Seidel und Jacobi-Iteration konvergieren (da $\varrho(H) < 1$ dann erfüllt ist)