Seminar "Grundlegende Algorithmen"

Auflösung von Rekursionen mittels der charakteristischen Funktion

gehalten von Sara Elisabeth Adams

am 02.11.2004

Quelle:

Brassard, Bratley: "Algorithmik - Theorie und Praxis" (S. 95-110)

erschienen im Wolfram Verlag, 1993

Inhaltsverzeichnis

1 Einführende Worte

1.1 Beispiele

Bevor wir uns mit der Auflösung von (bestimmten) Rekursionen beschäftigen, betrachten wir einige Beispiele für Rekursionen. Relativ bekannt sind etwa:

1. Die Funktion Fakultät:
$$n! = n \cdot (n-1)!, \quad \text{wobei } 0! = 1$$
2. Die Fibonacci-Folge:
$$fib_n = fib_{n-1} + fib_{n-2}, \quad \text{wobei } fib_0 = 0,\ fib_1 = 1$$
3. Orthogonale Polynome: z.B. Tschebyscheff, Legendre, Hermite
$$p_{n+1}(x) = \left(x - \frac{(p_n, xp_n)}{(p_n, p_n)}\right) \cdot p_n(x) - \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} \cdot p_{n-1}(x)$$
Durch die ersten beiden Folgeglieder und die inneren Produkte (,) entstehen verschiedene Systeme orthogonaler Polynome.
Mögliche Anwendung: Mit Hilfe der Nullstellen dieser Polynome lassen sich bestimmte Integrale annähern.
4. B-Splines (stückweise polynomielle Funktionen)
$$B_j^k(x) = \frac{(x - x_j)B_j^{k-1}(x) + (x_{j+k+1} - x)B_{j+1}^{k-1}(x)}{x_{j+k+1} - x_j}$$
Die Anfangsglieder stehen in Abhängigkeit von einer endlichen Punktemenge X und dem Grad der stückweise polynomiellen Funktionen.
Mögliche Anwendung: Splines eignen sich für die Interpolation von Funktionen. Im Vergleich zur Polynominterpolation bilden sie verschiedene Vorteile (etwa die Existenz eines kompakten Trägers).

1.2 Motivation

In welchem Zusammenhang steht nun aber die Auflösung von Rekursionen mit dem Seminarthema "Grundlegende Algorithmen"?
Bei der Analyse von Algorithmen stößt man häufig auf ein System von Rekursionen. Um die Wachstumsrate dieser Rekursionen zu bestimmen, ist es hilfreich die Rekursionen in Funktionen umzuschreiben. So kann zum Beispiel die Komplexität eines Algorithmus abgeschätzt werden.

Eine mögliche (pragmatische) Herangehensweise sieht wie folgt aus:

- Berechne die ersten Werte der Rekursion,
- suche eine Gesätzmäßigkeit
- und beweise diese per Induktion.

Bei bestimmten Rekursionen ist es jedoch möglich die Rekursionen fast mechanisch aufzulösen. Im Folgenden wird eine Methodik hierfür beschrieben.

2 Mechanisches Lösen von linearen Rekursionen

2.1 Homogene Rekursionen

Als erstes werden wir lineare, homogene Rekursionen betrachten, das heißt Rekursionen der Form

$$\sum_{i=0}^{k} a_i t_{n-i} = a_0 t_n + a_1 t_{n-1} \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Ein möglicher Ansatz zum Auflösen dieser Rekursion, ist die Interpretation der Rekursion als ein Polynom, das heißt wir nehmen an die Rekursionsterme t_n lassen sich durch x^n ausdrücken:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$

Wir suchen also die Nullstellen des Polynoms

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i} = x^{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i}$$

Es ist klar, dass $x = 0$ eine $(n-k)$-fache Nullstelle ist. Diese Lösungen sind jedoch uninteressant, da dann $t_n = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ gelten würde, also eine triviale Rekursion daraus resultieren würde.
Im Folgenden werden wir die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i} = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k x^0 = 0$$

als **charakteristische Gleichung** der Rekursion bezeichnen. Die Lösungen $r_i, \; i = 1, .., k$ bezeichnen wir als **Wurzeln**. Sie sind entscheidend für die Herleitung der Auflösung der Rekursion.
Nun sind zwei Fälle denkbar:

1. Die r_i sind paarweise verschieden.
2. Die r_i sind nicht paarweise verschieden.

Wir werden zuerst den Fall betrachten, dass die Wurzeln paarweise verschieden sind, es folgt die Vorhergehensweise für den allgemeinen Fall.

2.1.1 Paarweise verschiedene Wurzeln

Seien $r_i \; (i = 1, .., k)$ die pw. versch. Lösungen der char. Gleichung.

Dann haben die Lösungen der Rekursion die Form

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k^n$$

Die Koeffizienten $c_i, \; i = 1, .., k$ sind durch die **Anfangsbedingungen**, das heißt die ersten Rekursionsglieder

$$t_i, \; i = j_0, \ldots, j_0 + k$$

bestimmt. Da wir lineare Rekursionen betrachten, ist als ein lineares Gleichungssystem zu lösen.
Bemerkung: Oft ist die Bestimmung der $c_i, \; i = 1, .., k$ nicht nötig, da nur die Wachstumsrate der Rekursion von Interesse ist. Bei der Angabe der Komplexität eines Algorithmus ist etwa die O- oder Θ-Notation üblich.

2.1.2 Beispiel

Wir betrachten die Rekursion

$$t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - 2t_{n-3} \quad t_0 = 0, \; t_1 = 2, \; t_2 = 3$$

beziehungweise

$$t_n - 2t_{n-1} - t_{n-2} + 2t_{n-3} = 0 \quad t_0 = 0, \; t_1 = 2, \; t_2 = 3$$

Mit dem Ansatz $t_n = x^n$ folgt also

$$x^n - 2x^{n-1} - x^{n-2} + 2x^{n-3} = 0$$

Demnach hat die charakteristische Gleichung die Form

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0$$

Die Wurzeln der Gleichung sind offensichtlich $-1, \; 1, \; 2$. Die Rekursion sieht also aufgelöst wie folgt aus:

$$t_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 1^n + c_3 \cdot 2^n$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen, das auf den ersten Rekursionsgliedern basiert:

$$\left.\begin{array}{rcl} (-1)^0 \cdot c_1 + 1^0 \cdot c_2 + 2^0 \cdot c_3 & = & t_0 = 0 \\ (-1)^1 \cdot c_1 + 1^1 \cdot c_2 + 2^1 \cdot c_3 & = & t_1 = 2 \\ (-1)^2 \cdot c_1 + 1^2 \cdot c_2 + 2^2 \cdot c_3 & = & t_2 = 3 \end{array}\right\} \; c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}, \; c_3 = 1$$

$$\Rightarrow \; t_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{2} + 2^n$$

Die ersten Folgeglieder sind also:

$$0, \; 2, \; 3, \; 8, \; 15, \; 32, \; 63, \; 128, \; 255, \; 512, \; 1023, \; 2048, \; 4095$$

Man hätte jedoch auch ohne die Berechnung der Koeffizienten bereits sagen können, dass die Rekursion (maximal) so schnell wie 2^n steigen wird.

2.1.3 Allgemeine Wurzeln

Bisher haben wir nur paarweise verschiedene Wurzeln betrachtet. Was passiert jedoch, wenn es Wurzeln gibt, deren Vielfachheit größer als 1 ist?
Dazu betrachten wir den Spezialfall einer doppelten Nullstelle:

Sei r eine doppelte Nullstelle der Funktion $p(x) := \sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i}$. Dann lässt sich $p(x)$ als $(x-r)^2 \cdot q(x)$ schreiben, wobei $q(x)$ ebenfalls ein Polynom ist. Wir betrachten nun eine Funktion

$$h(x) = x \cdot [x^{n-k} \cdot p(x)]' = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (n-i) \cdot x^{n-i}$$

Setzen wir statt $p(x)$ nun $(x-r)^2 \cdot q(x)$ und wenden die Produktregel zum Ableiten von Funktionen an, so folgt:

$$h(x) = x \cdot [(x-r)^2 \cdot x^{n-k} q(x)]' = x \cdot \left[2(x-r) \cdot x^{n-k} q(x) + (x-r)^2 \cdot [x^{n-k} q(x)]'\right]$$

Insbesondere ist r eine Nullstelle von $h(x)$, also

$$h(r) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (n-i) \cdot r^{n-i} = 0$$

Das heisst aber, dass wir eine weitere Lösung $n \cdot r^n$ der Rekursion gefunden haben.
Diese Überlegung lässt sich einfach auf Nullstellen mit beliebiger Vielfachheit betrachten, wobei gilt:

r hat Vielfachheit $e \in \mathbb{N} \Rightarrow\ r^n,\ nr^n,\ n^2 r^n,\ ..,\ n^{e-1} r^n$ sind Lösungen der Rekursion

Bei allgemeinen Wurzeln haben die Lösungen der Rekursion also die Form

$$t_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{e_i} c_i \cdot n^{j-1} \cdot r_i^n,$$

wobei $r_i,\ i = 1, .., s$ die paarweise verschiedenen Wurzeln sind und e_i deren jeweilige Vielfachheit. Es ist klar, dass

$$\sum_{i=1}^{s} e_i = k$$

gelten muss.
Setzen wir $e_i = 1\ \forall i = 1, .., s$, so erhalten wir offensichtlich das gleiche Ergebnis wie im vorherigen Teil.

2.1.4 Beispiel

Wir betrachten die Rekursion

$$t_n = 8t_{n-1} - 21t_{n-2} + 18t_{n-3} \qquad t_0 = 0,\ t_1 = 5,\ t_2 = 6$$

beziehungsweise

$$t_n - 8t_{n-1} + 21t_{n-2} - 18t_{n-3} = 0 \qquad t_0 = 0,\ t_1 = 5,\ t_2 = 6$$

Mit dem Ansatz $t_n = x^n$ folgt also

$$x^n - 8x^{n-1} + 21x^{n-2} - 18x^{n-3} == 0$$

Demnach hat die charakteristische Gleichung die Form

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2) \cdot (x-3)^2 = 0$$

Die Wurzeln der Gleichung sind also 2 und außerdem 3 mit Vielfachheit 2. Die Rekursion sieht also aufgelöst wie folgt aus:

$$t_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + c_3 \cdot n \cdot 3^n$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen, das auf den ersten Rekursionsgliedern basiert:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2^0 \cdot c_1 + 3^0 \cdot c_2 + 3^0 \cdot 0 \cdot c_3 & = & 0 \\ 2^1 \cdot c_1 + 3^1 \cdot c_2 + 3^1 \cdot 1 \cdot c_3 & = & 5 \\ 2^2 \cdot c_1 + 3^2 \cdot c_2 + 3^2 \cdot 2 \cdot c_3 & = & 6 \end{array}\right\} c_1 = -24,\ c_2 = 24,\ c_3 = -\frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow\ t_n = -3 \cdot 2^{n+3} + 2^3 \cdot 3^{n+1} - 19 \cdot n \cdot 3^{n-1}$$

Die ersten Folgeglieder sind also:

$$0,\ 5,\ 6,\ -57,\ -492,\ -2631,\ -11742,\ -47541$$

2.2 Inhomogene Rekursionen

Im Folgenden versuchen wir Rekursionen der Form

$$\sum_{i=0}^{k} a_i t_{n-i} = \sum_{i=1}^{s} b_i^n \cdot p_i(n)$$

zu lösen. Dabei sind die b_i Konstanten und $p_i(n)$ Polynome in n mit Grad d_i.
Die grundlegende Idee ist nun diese inhomogene Rekursion durch einige Manipulationen auf eine homogene Rekursion zurückzuführen. Dann ist das bereits vorgestellte Schema anwendbar.

2.2.1 Manipulationen zu einer homogenen Rekursion

Diese Manipulationen werden an einem kurzen Beispiel verdeutlicht:
Sei etwa die Rekursion

$$t_n - 7t_{n-1} + 12t_{n-2} = 7^n$$

gegeben. Dann gilt insbesondere (einerseits durch Verschiebung von n auf $n+1$, andererseits durch Multiplikation mit 7 und schließlich durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten):

$$\begin{array}{rrrrrcl} & t_{n+1} & -7t_n & +12t_{n-1} & & = & +7^{n+1} \\ -(& & +7t_n & -49t_{n-1} & +84t_{n-2} & = & +7^{n+1}\ ) \\ \hline & t_{n+1} & -14t_n & +61t_{n-1} & -84t_{n-2} & = & 0 \end{array}$$

Wir haben also eine homogene Rekursion erhalten. Die charakteristische Gleichung dieser Rekursion ist

$$x^3 - 14x^2 + 61x - 84 = (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-7) = 0$$

Insbesondere ist die Wurzel 7 durch die Manipulationen der Rekursion zustande gekommen:

Betrachte die Rekursion $t_n - 7t_{n-1} + 12t_{n-2} = 0$. Dann ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3) \cdot (x-4) = 0$$

Das Hinzukommen der Wurzel 7 ist nachvollziehbar, da eine Multiplikation mit 7 während der Manipulationen durchgeführt wurde.

2.2.2 Verallgemeinerung

Entsprechend diesem Schema können wir stets aus einer inhomogenen Rekursion der Form

$$\sum_{i=0}^{k} a_i t_{n-i} = \sum_{i=1}^{s} b_i^n \cdot p_i(n)$$

eine homogene Rekursion schließen. Diese "neue" homogene Rekursion besitzt dann die charakteristische Gleichung

$$(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^{n-i}) \cdot \prod_{i=1}^{s} (x - b_i)^{d_i+1}$$

Dementsprechend gibt es bei der Auflösung der Rekursion weitere Summanden und somit auch entsprechend mehr Koeffizienten c_i. Es müssen also weitere Anfangsbedingungen bestimmt werden, um die c_i zu berechnen. Dazu berechnet man einfach weitere Folgeglieder mit Hilfe der ursprünglichen Rekursionsformel.

2.2.3 Beispiel

Wir betrachten die Rekursion

$$t_n = -3t_{n-1} + n \cdot 2^n \qquad t_0 = 0$$

beziehungsweise

$$t_n + 3t_{n-1} = n \cdot 2^n \qquad t_0 = 0$$

Hier ist dementsprechend $s = 1$, $b_1 = 2$ und $p_1(n) = n$, also $d_1 = 1$.
Durch Manipulationen erhält man eine homogene Rekursion mit charakteristischer Gleichung

$$(x + 3)(x - 2)^2 = 0$$

Die Rekursion sieht also aufgelöst wie folgt aus:

$$t_n = c_1 \cdot (-3)^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n$$

Mit Hilfe der Rekursion bestimmen wir zwei weitere Anfangsglieder:

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 2$$

Die Anfangsbedingungen liefern dann

$$\left.\begin{array}{rcl} (-3)^0 \cdot c_1 + 2^0 \cdot c_2 + 2^0 \cdot 0 \cdot c_3 & = & 0 \\ (-3)^1 \cdot c_1 + 2^1 \cdot c_2 + 2^1 \cdot 1 \cdot c_3 & = & 2 \\ (-3)^2 \cdot c_1 + 2^2 \cdot c_2 + 2^2 \cdot 2 \cdot c_3 & = & 2 \end{array}\right\} c_1 = -\frac{6}{25},\ c_2 = \frac{6}{25},\ c_3 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow\ t_n = \frac{2}{25}(-3)^{n+1} + \frac{3}{25}2^{n+1} - \frac{1}{5} \cdot n \cdot 2^{n+1}$$

Die ersten Folgeglieder sind also:

$$0,\ 2,\ 2,\ 18,\ 10,\ 130,\ -6,\ 914,\ -694,\ 2526$$

3 Erweiternde Methoden

Die Rekursionen, die wir bisher betrachtet haben, konnten komplett mechanisch gelöst werden. Der Preis dafür war jedoch eine recht starke Einschränkung der Form der Rekursionen. Im Folgenden wird an Hand von zwei Beispielen gezeigt, wie man mit Variablentausch und Wertebereichtstransformation auch andere Rekursionen auflösen kann.
Allerdings gibt es hier keine festen Regeln, wie man vorzugehen hat. Die Umformungen, die durchgeführt werden, sind oft nicht intuitiv klar und etwas Geschick, Übung und/oder Glück sind vonnöten.
In den aufgeführten Beispielen sind die Umformungen jedoch recht naheliegend, da hier nur das Prinzip veranschaulicht werden soll.

3.1 Variablentausch

Die Idee beim Variablentausch ist es die Darstellung einer Rekursion mit Termen $T(n)$ zu vereinfachen. Dazu verschiebt man etwa den Definitionsbereich, indem man spezielle n betrachtet.
Grundlegend führt man also eine

- Substitution $T(n) \mapsto t_k$ durch,
- löst die "neue" Rekursion (mit Termen t_k) auf
- und resubstituiert dann wieder $t_k \mapsto T(n)$.

3.1.1 Beispiel

Wir betrachten die Rekursion

$$T(n) = 12 \cdot T(\frac{n}{3}) - 27 \cdot T(\frac{n}{9}) + n^2$$

und führen eine Substitution durch, indem wir $n = 3^k$ betrachten:

$$\begin{array}{rclll} T(3^k) & = & 12 \cdot T(3^{k-1}) & -27 \cdot T(3^{k-2}) & +3^{2k} \\ t_k & = & 12 \cdot t_{k-1} & -27 \cdot t_{k-2} & +3^{2k} \end{array}$$

beziehungsweise

$$t_k - 12 \cdot t_{k-1} + 27 \cdot t_{k-2} = 9^k$$

Wir erhalten also die charakteristische Gleichung

$$(x - 3) \cdot (x - 9)^2 = 0$$

und somit sieht die Rekursion auf t_k aufgelöst wie folgt aus:

$$t_k = c_1 \cdot 3^k + c_2 \cdot 9^k + c_3 \cdot k \cdot 9^k$$

Durch Resubstitution ($t_k \mapsto \log_3 n$) erhält man somit

$$T(n) = c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 + c_3 \cdot \log_3 n \cdot n^2$$

Es folgt (für $n = 3^k$):
$T(n) \in O(n^2 \cdot \log_3 n)$ beziehungsweise (für $c_1, c_2, c_3 \neq 0$) $T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log_3 n + n^2 + n)$

3.2 Wertebereichstransformation

Bei der Wertebereichstransformation verändern wir nicht (nur) den Definitionsbereich, sondern auch den Wertebereich. Das heißt wir bilden eine total neue Rekursion, deren Folgeglieder sich von den ursprünglichen Folgegliedern unterscheiden können.
Dies ist etwa hilfreich, wenn man eine nichtlineare Rekursion auflösen will. Mit Hilfe einer Wertebereichstransformation ist es dann eventuell möglich zu der nichtlinearen Rekursion eine lineare Rekursion zu finden. Sobald man diese gelöst hat, kann man auf die eigentliche Rekursion rückschließen.

3.2.1 Beispiel

Wir betrachten die Rekursion

$$T(n) = n \cdot T^2(\frac{n}{2})$$

Mit Hilfe eines Variablentauschen vereinfachen wir die Rekursion etwas:

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2^k \cdot T^2(2^{k-1}) \\ t_k &= 2^k \cdot t_{k-1}^2 \end{aligned}$$

Setzen wir V_k =lb[1]t_k, so ergibt sich eine neue Rekursion

$$V_k = k + 2 \cdot V_{k-1}$$

Die charakteristische Gleichung dieser Rekursion ist

$$(x-2) \cdot (x-1)^2 = 0$$

und demnach sieht die Rekursion (auf V_k) aufgelöst wie folgt aus:

$$c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 1^k + c_3 \cdot k \cdot 1^k$$

Setzen wir nun $T(1) = 6$, so ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow & t_0 = 6 & & \\ \Rightarrow & V_0 = \mathrm{lb}6 = 1 + \mathrm{lb}3 & & \\ \Rightarrow & V_1 = 3 + 2\mathrm{lb}3 & V_2 = 8 + 4\mathrm{lb}3 & \\ \Rightarrow & c_1 = 3 + \mathrm{lb}3 & c_2 = -2 & c_3 = -1 \end{array}$$

Es folgt also:

$$V_k = (3 + \mathrm{lb}3) \cdot 2^k - 2 - k$$

[1] $\mathrm{lb}(t) := \log_2(t)$

Nun müssen wir erst die Wertebereichstransformation und dann den Variablentausch rückgängig machen:

$$\begin{aligned} V_k &= (3 + \mathrm{lb}3) \cdot 2^k - 2 - k \\ t_k &= 2^{(3+\mathrm{lb}3) \cdot 2^k - 2 - k} \\ &= \frac{2^{3 \cdot 2^k} \cdot 3^{2^k}}{2^{k+2}} \\ T(n) &= \frac{2^{3 \cdot 2^{\mathrm{lb}n}} \cdot 3^{2^{\mathrm{lb}n}}}{2^{\mathrm{lb}n+2}} \\ &= \frac{2^{3 \cdot n - 2} \cdot 3^n}{n} \end{aligned}$$

Schließlich haben wir die ursprüngliche Rekursion aufgelöst:

$$T(n) = \frac{2^{3n-2} \cdot 3^n}{n}$$