Schubfachprinzip und doppeltes Abzählen

Sara Elisabeth Adams

Sommersemester 2003

Hauptquelle:
Proofs from THE BOOK

Chapter 21, pp. 131-141: "Pigeon-hole and double counting"

von Martin Aigner und Günther M. Ziegler

Second Edition (2001)

Inhaltsverzeichnis

1 Schubfachprinzip

Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei r < n, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.
Sei f: N $\to$ R eine Abbildung mit $|R| = r < n = |N| < \infty$.
Es gilt sogar: $\exists$ a $\in$ R : $|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$
Beweis: indirekt
Ang. $\nexists$ a $\in$ R : $|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil \Rightarrow \forall$ a $\in$ R : $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$
$\Rightarrow \quad n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r \cdot \frac{n}{r} = n$

1.1 Zahlen

Betrachten wir n+1 Zahlen aus der Menge {1,2,$\cdots$,2n},

- dann gibt es zwei von ihnen, die relativ prim zueinander sind. (d.h. sie haben keine gem. Teiler >1)
  Beweis klar, da es zwei Zahlen geben muss, die sich um genau 1 unterscheiden.

- dann gibt es zwei Zahlen, von denen die eine die andere teilt.
  Beweis: Stelle alle n+1 Zahlen als $2^k \cdot m$ dar, so dass k maximal ist
  $\Rightarrow$ m ungerade Zahl $\in$ {1, $\cdots$, 2n-1} $\quad\Rightarrow$ n Möglichkeiten für m
  $\Rightarrow$ min. 2 versch. Zahlen haben den gleichen ungeraden Anteil
  $\Rightarrow$ eine der Zahlen teilt die andere

1.2 Folgen

In einer Folge $a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}$ von mn+1 versch. reellen Zahlen gibt es immer eine ansteigende Teilfolge

(1) $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$ der Länge $m+1$
und/oder eine absteigende Teilfolge
(2) $a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$ der Länge $n+1$
Beweis:
Man ordne jeder Zahl a_i die Zahl t_i zu, die die Länge der längsten ansteigenden Teilfolge bezeichnet, die mit a_i anfängt.
Gibt es ein $t_i > m$, so ist (1) erfüllt. Ang. $t_i \leq m \ \forall i$ z.z.: (2) ist erfüllt
Betrachte f : $\{a_1, \cdots, a_{mn+1}\} \to \{1, \cdots, m\}, a_i \to t_i$
nach SFP $\exists$ s $\in \{1, \cdots, m\} : |f^{-1}(s)| \geq \lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n+1$
Seien $a_{j_i}, \cdots, a_{j_{n+1}}$ n+1 dieser Zahlen mit $j_1 < \cdots < j_{n+1}$
$a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$ kann nicht gelten, da sonst $f(a_{j_i}) = s+1$
$\Rightarrow a_{j_i} > a_{j_{i+1}}$ $\Rightarrow$ es ex. eine absteigende Folge der Länge n+1

Anwendungsbeispiel: Dimension von vollständigen Graphen K_n
Sei $N = \{1, \cdots, n\}$ $(n \geq 3)$ und seien m Permutationen $\pi_1, \cdots, \pi_m$ von N gegeben. Die Permutationen $\pi_1, \cdots, \pi_m$ stellen den Graphen K_n dar, wenn zu je drei versch. Zahlen i,j,k eine Permutation existiert, in der k nach beiden Zahlen i und j kommt. Die Dimension von K_n ist als das kleinste m definiert, für das eine Darstellung $\pi_1, \cdots, \pi_m$ existiert.
Bsp. $dim(K_3) = 3$ etwa 123 132 231
$dim(K_4) = 3$ etwa 1234 2431 1432
Behauptung: $dim(K_n) \geq \log_2 \log_2 n$
Beweis: $dim(K_n)$ ist monotone Funktion in n
$\Rightarrow$ es reicht die Beh. fuer n:=$2^{2^p} + 1$ $(p \geq 0)$ zu zeigen, da gilt:

$$p = \log_2 \log_2 2^{2^p} < \log_2 \log_2 \mathrm{n} < \log_2 \log_2 (2^{2^p} + 2) < \cdots < \log_2 \log_2 2^{2^{p+1}} = p+1$$

und $dim(K_n)$ ganzzahlig ist.
indirekt: Ang. es wäre $dim(K_n) \leq p$ und $\pi_1, \cdots, \pi_p$ seien darstellende Permutationen von $\{1, \cdots, 2^{2^p} + 1\}$.
Fall $p < 2$ trivial. Sei also $p \geq 2$.
Dann ex. in π_1 eine mon. Teilfolge A_1 der Länge $2^{2^{p-1}}+1$ $\left(2^{2^p}+1 = (2^{2^{p-1}})^2+1\right)$.
In π_2 ex. eine monotone Teilfolge A_2 von A_1 der Länge $2^{2^{p-2}} + 1$ $\cdots$ In π_p ex. eine monotone Teilfolge A_p der Länge $2^{2^0} + 1 = 3$, die in allen π_i enthalten ist.
Sei $A_p = abc$ $\Rightarrow a < b < c$ oder $a > b > c$
$\Rightarrow b$ steht nie nach a und c $\Rightarrow \pi_1, \cdots, \pi_p$ nicht darstellend
$\big($Bsp: $\log_2 \log_2 1422564 \approx 4,35 \Rightarrow dim(K_{1422564}) \geq 5$ tatsächlich: $(K_{1422564}) =$ 7$\big)$

1.3 Summen

Seien n ganze Zahlen $a_1, \cdots, a_n$ gegeben. Dann gibt es einen Abschnitt von aufeinander folgenden Zahlen $a_{k+1}, \cdots, a_l$ $(k < l)$, deren Summe $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.
Beweis: Sei $f : N \to R,\ f(m) = m \mod n$
mit $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_i\}, R = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Dann gilt:
$|N|$ =n+1>n= $|R|$ $\Rightarrow$ $\exists\, m_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i,\ m_2 = \sum_{i=1}^{l} a_i$ $(k < l)$ mit $f(m_1) = f(m_2)$
$\Rightarrow f\big(\sum_{i=k+1}^{l} a_i\big) = f\big(\sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\big) = 0$

2 Doppeltes Abzählen

Seien die endlichen Mengen R und C gegeben und sei $S \subseteq R \times C$. Ist $(p, q) \in S$, so heißen p und q inzident. Wenn wir mit r_p die Anzahl der Elemente bezeichnen, die zu $p \in R$ inzident sind und mit c_q die Anzahl der Elemente, die zu $q \in C$ inzident sind, so gilt: $\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q$
Darstellung von S als Matrix A=(a_{pq}) mit a_{pq}= 1, falls $(p, q) \in S$, sonst $a_{pq} = 0$
$\sum_{p \in R} r_p$ $\widehat{=}$ Addition der a_{pq} zeilenweise
$\sum_{a \in C} c_q$ $\widehat{=}$ Addition der a_{pq} spaltenweise

2.1 Nochmals Zahlen

Betrachte $S = \big\{(i, j) | i \in R, j \in C, i \text{ teilt } j\big\}$ Definiere:
$t(j)$:= Anzahl der Teiler von j, $\bar{t}(n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} t(j)$ (Durchschnitt der $t(j)$)
Behauptung: $(\ln n) - 1 \leq \bar{t}(n) \leq (\ln n) + 1$
Beweis: Mit DA folgt, dass man $\bar{t}(n)$ auch anders bestimmen kann:

$\frac{C}{R}$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	1	1	1	$\cdots$
2		1		1	$\cdots$
3			1		$\cdots$
4				1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Zur Veranschaulichung $\big(1 \,\widehat{=}\, (p, q) \in S\big)$

$t(j)$ gibt die Anzahl der 1en in der j-ten Spalte an. Zähle nun zeilenweise:
1 (i-te Zeile, k-ter Eintrag) $\widehat{=}\, k \cdot i$ $\Rightarrow$ 1en $\widehat{=}$ $1i, 2i, \cdots, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \cdot i$

$$\Rightarrow \bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} t(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big\lfloor \frac{n}{i} \Big\rfloor$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1 + \ln n$$

$$\ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{n}{i} - 1\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\Big) - 1 \ge \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 1 \ge (\ln n) - 1$$

2.2 Graphen

Satz

Sei G ein endlicher einfacher Graph mit Eckenmenge V und Kantenmenge E.
Grad $d(v)$ einer Ecke v: Anzahl der mit v inzidenten Kanten.
Behauptung: $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$
Beweis: Betrachte $S \subseteq V \times E$, $(v,e) \in S$ falls v Endecke von e
$S = \sum_{v\in V} d(v)$, da jede Ecke genau $d(v)$ zur Summe beiträgt
$S = 2|E|$, da jede Kante genau zwei Ecken hat. $\Rightarrow \sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$

Extremalproblem für Graphen

Ang. $G = (V,E)$ hat n Ecken und enthält keinen Kreis der Länge 4 (C_4-Eigenschaft). **Wie viele Kanten kann G dann max. haben?**
Sei $S = \Big\{\big(u, \{v,w\}\big) : u \,\text{benachbart zu}\, v \,\text{und}\, w, v \neq w;\ u,v,w \in V\Big\}$
$\Rightarrow |S|$ Anzahl der Untergraphen, die aus genau 3 Ecken und 2 Kanten bestehen.

- $|S| = \sum_{u\in V} \binom{d(u)}{2}$ $\Big($Ist u Endecke von $d(u)$ Kanten, so gibt es $\binom{d(u)}{2}$ Möglichkeiten einen Untergraphen zu wählen.$\Big)$
- $|S| \le \binom{n}{2}$ $\Big($wg. C_4 und $\binom{n}{2}$ versch. Paare $\{v,w\}$ existieren$\Big)$

Im folgenden sei $\sum = \sum_{u\in V}$

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & \sum \binom{d(u)}{2} & \le & \binom{n}{2} & /\cdot 2 \quad / + \sum d(u) \\
\Rightarrow & \sum\big(d(u)^2 - d(u)\big) + \sum d(u) & \le & n(n-1) + \sum d(u) & \\
\Rightarrow & \sum d(u)^2 & \le & n(n-1) + \sum d(u) & \\
\binom{Cauchy}{Schwarz} & \Big(\sum d(u)\Big)^2 & \le & \sum d(u)^2 \cdot \sum 1 & \\
\Rightarrow & \Big(\sum d(u)\Big)^2 & \le & n \cdot \Big(n(n-1) + \sum d(u)\Big) & \\
\Rightarrow & \big(2|E|\big)^2 & \le & n^2(n-1) + n\cdot 2|E| & \\
\Rightarrow & |E|^2 - \frac{n}{2}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} & \le & 0 & \\
\Rightarrow & |\mathbf{E}| & \le & \frac{1}{2}\big(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^4}{4} + n^2(n-1)}\big) & \\
\Rightarrow & & = & \frac{n}{4} + \frac{n}{2}\sqrt{n - \frac{3}{4}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{4}}\Big(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{4n-3}}\Big) &
\end{array}$$