Sobolev-orthogonale Polynome auf dem Einheitskreis

Sara Elisabeth Adams

17.05.2004

Hauptquelle:

"Journal of Approximation Theory 78", pp. 127-146:

Orthogonal Polynomials of Sobolev Type on the Unit Circle

von Alicia Cachafeiro und Francisco Marcellán

29.01.1993

Inhaltsverzeichnis

Literaturliste

1. A. CACHAFEIRO AND F. MARCELLÁN, Academic Press Inc., "Journal of Approximation Theory 78", pp. 127-146, 1994

2. P. GARCIA-LAZARO, "Distribuciones y Polinomios Ortogonales," Doctoral Dissertation, Univ. Zaragoza 1990

3. P. GARZIA-LAZARO AND F. MARCELLÁN, Christoffel formulas for N-kernels associated to Jordan arcs, "Lecture Notes in Mathematics," Vol. 1171, pp. 195-203, Springer-Verlag, Berlin, 1985

4. Y.L. GERONIMUS, Polynomials orthogonal on a circle and their applications, "Amer. Math. Soc. Transl.", Series 1 Vol. 3, 1-78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962

5. G.FREUD, "Orthogonal Polynomials" Pergamon, Oxford, 1971

6. F.MARCELLÁN, Orthogonal polynomials and Toeplitz matrices: Some applications, "Seminario Matematico Garcia de Galdeano", pp.203-214, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1988

7. M. ALFARO, Teoría parámetrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2)* XXIX, No. 1 (1974)

8. C.TASIS, "Propiedades Difereenciales de los Plinomios Ortogonales Relativos a la Circunferencia Unidad", Doctoral Dissertation, Univ. Cantabria, 1989

1 Definitionen

- $u : \Lambda \to \mathbb{C}$ **Hermitesche lineare Funktion**
  - $u(z^n) = \overline{u(z^{-n})}\ \forall\, n \geq 0$
  - $u(a \cdot z^k + b \cdot z^l) = a \cdot u(z^k) + b \cdot u(z^l)\ \forall\, a, b \in \mathbb{C},\ k, l \in \mathbb{Z}$
- $\varphi_u : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}$ **Bilinearform**
  - φ_u bilinear
  - $\varphi_u\big((P(z), Q(z)\big) = u\big(P(z) \cdot \overline{Q}(\frac{1}{z})\big)$
- $<,>: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}$ **Hermitesche Bilinearform**
  - $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, a \in \mathbb{C}, |a| = 1$
  - $< P(z), Q(z) >= \varphi_u\big((P(z), Q(z)\big) + \lambda^{-1} \cdot P'(a) \cdot \overline{Q'(a)}$

2 Algebraische Eigenschaften

2.1 Theorem

$$<,> \text{ regulär } \Leftrightarrow\ \lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a) \neq 0 \qquad (n \geq 1),$$

wobei $K_{n-1}^{(1,1)}(a, a) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|\phi_j'(a)|^2}{e_j},\ \big\{\phi_n(z)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ MOPS[1] zu u und $e_j = u\big(\phi_j(z) \cdot \overline{\phi_j}(\frac{1}{z})\big)$

$$\psi_n(z) = \phi_n(z) - \frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} \cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z, a),$$

wobei $\big\{\psi_n(z)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ MOPS zu $<,>$, $K_{n-1}^{(0,1)}(z, a) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\phi_j(z)\cdot\overline{\phi_j'(a)}}{e_j}$

Beweis:
($\Rightarrow$) Sei $<,>$ regulär und $\big\{\psi_n(z)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ das dazugehörige MOPS, d.h.
$< \psi_n(z), \psi_m(z) >= a_n \cdot \delta_{nm}, a_n \neq 0.$
Es gilt (durch orthogonale Projektion):

$$\psi_n(z) = \phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{nj} \cdot \phi_j(z),$$

wobei $b_{nj} = \frac{\varphi_u\big(\psi_n(z),\phi_j(z)\big)}{\varphi_u\big(\phi_j(z),\phi_j(z)\big)} = \frac{-\lambda^{-1}\cdot\psi_n'(a)\cdot\overline{\phi_j'(a)}}{e_j} \quad (0 \leq j \leq n-1).$
Folglich: $\psi_n(z) = \phi_n(z) - \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z, a).$
Man betrachte die Ableitung für $z = a :\ \psi_n'(a) = \phi_n'(a) - \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)$
$\Rightarrow\ \psi_n'(a)[\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)] = \lambda \cdot \phi_n'(a)$
Es gilt: $< \psi_n(z), \phi_n(z) >= \varphi_u\big(\phi_n(z), \phi_n(z)\big) + \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot \overline{\phi_n'(a)},$
folglich: $e_n^{-1}\cdot < \psi_n(z), \phi_n(z) >= 1 + e_n^{-1} \cdot \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot \overline{\phi_n'(a)},$

[1]monic orthogonal polynomial sequence: System monischer, orthogonaler Polynome

Induktion:
Induktionsanfang: $\lambda = \lambda + K_0^{(1,1)}(a, a) \neq 0$
Induktionsschritt: Sei $\lambda + K_{n-1}^{(1,1)} \neq 0$. Dann gilt:

$$e_n^{-1}\cdot < \psi_n(z), \phi_n(z) >= 1 + e_n^{-1}\lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot \overline{\phi_n'(a)} = 1 + e_n^{-1}\lambda^{-1}\overline{\phi_n'(a)} \cdot \frac{\lambda \cdot \phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)}$$

$$= \frac{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a) + |\phi_n'(a)|^2 e_n^{-1}}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} = \frac{\lambda + K_n^{(1,1)}(a, a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)}$$

Da $<,>$ regulär ist, gilt: $< \psi_n(z), \phi_n(z) >=< \psi_n(z), \psi_n(z) >\neq 0$ und somit
$\lambda + K_n^{(1,1)}(a, a) \neq 0$

($\Leftarrow$) Sei $\lambda + K_{n-1}^{(1,1)} \neq 0\ \forall\, n \geq 1$. Definiere eine Folge $\{\psi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ von monischen Polynomen:

$$\psi_n(z) = \phi_n(z) - \frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} \cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z, a)$$

Für $m < n$ gilt dann:

$$< \psi_n(z), \phi_m(z) >= \varphi_u\big(\psi_n(z), \phi_m(z)\big) + \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot \overline{\phi_m'(a)}$$

$$= -\frac{\varphi_u\big(\phi_m(z) \cdot \phi_m(z)\big)}{e_m} \cdot \frac{\phi_n'(a) \cdot \overline{\phi_m'(a)}}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} + \lambda^{-1} \cdot \phi_n'(a) \cdot \overline{\phi_m'(a)} - \frac{\lambda^{-1} \cdot \phi_n'(a) \cdot \overline{\phi_m'(a)}}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} \cdot K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)$$

$$= \frac{1}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}}\big(-\phi_n'(a) \cdot \phi_m'(a) + \phi_n'(a) \cdot \phi_m'(a) + \lambda^{-1} \cdot \phi_n'(a) \cdot \phi_m'(a) \cdot K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)$$

$$-\lambda^{-1} \cdot \phi_n'(a) \cdot \phi_m'(a) \cdot K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)\big) = 0$$

Außerdem gilt:

$$< \psi_n(z), \phi_n(z) >= \varphi_u\big(\psi_n(z), \phi_n(z)\big) + \lambda^{-1} \cdot \psi_n'(a) \cdot \overline{\phi_n'(a)}$$

$$= \varphi_u\big(\phi_n(z), \phi_n(z)\big) + \frac{|\phi_n'(a)|^2}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} = e_n \cdot \frac{\lambda + K_n^{(1,1)}(a, a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a, a)} \neq 0$$

aus der Voraussetzung. □

2.2 Theorem

Seien $\{\phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{\psi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ die MOPS bezüglich u bzw. $<,>$. Dann gilt:

$$(z-a)^2\cdot\psi_n(z) = q_{1,n}(z)\cdot\phi_n^*(z) + q_{2,n}(z)\cdot\phi_n(z),$$

wobei

$$q_{1,n}(z) = (\overline{a})^{n-3}\cdot e_n^{-1}\cdot\frac{\phi_n'(a)}{\lambda+K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(\big[(n-1)\cdot\overline{a}\cdot\phi_n(a)-\phi_n'(a)\big](z-a)-\phi_n(a)\Big)$$

$$q_{2,n}(z) = (z-a)^2 + e_n^{-1}\cdot\frac{a\cdot\phi_n'(a)}{\lambda+K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(\big[a\cdot\overline{\phi_n(a)}-\overline{\phi_n'(a)}\big]\cdot(z-a)+a^2\cdot\overline{\phi_n(a)}\Big)$$

Beweis:

Wir wenden die Christoffel-Darboux-Formel (siehe Literatur [5] p.196 (1.21), [6], [7]):

$$K_{n-1}(z,y) = e_n^{-1}\cdot\frac{\phi_n^*(z)\cdot\overline{\phi_n^*(y)}-\phi_n(z)\cdot\overline{\phi_n(y)}}{1-z\cdot\overline{y}},$$

wobei gilt:

$$P^*(z) = z^n\cdot\overline{P}\big(\frac{1}{z}\big)\quad\forall\, P\in\mathbb{P}_n\qquad K_{n-1}(z,y) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\phi_j(z)\cdot\overline{\phi_j(y)}}{e_j}$$

Setzen wir $y=a$ und verwenden $|a|=1$, so folgt:

$$K_{n-1}(z,a) = a\cdot e_n^{-1}\cdot\frac{\phi_n(z)\cdot\overline{\phi_n(a)}-\phi_n^*(z)\cdot\overline{\phi_n^*(a)}}{z-a}$$

Wir betrachten außerdem die Ableitung in y:

$$K_{n-1}^{(0,1)}(z,y) = e_n^{-1}\Big[\frac{\phi_n^*(z)\cdot\overline{\phi_n^{*\prime}(y)}-\phi_n(z)\cdot\overline{\phi_n'(y)}}{1-z\cdot\overline{y}} + z\cdot\frac{\phi_n^*(z)\cdot\overline{\phi_n^*(y)}-\phi_n(z)\cdot\overline{\phi_n(y)}}{(1-z\cdot\overline{y})^2}\Big]$$

Setze nun y=a:

$$K_{n-1}^{(0,1)}(z,a) = \frac{a^2\cdot e_n^{-1}}{(a-z)^2}\cdot\Big(\phi_n(z)\cdot\big(-\overline{\phi_n'(a)}+z\cdot\overline{a}\cdot\overline{\phi_n'(a)}-z\cdot\overline{\phi_n(a)}\big)$$

$$+\phi_n^*(z)\cdot\big(\overline{\phi_n^{*\prime}(a)}-z\cdot\overline{a}\cdot\overline{\phi_n^{*\prime}(a)}+z\cdot\overline{\phi_n^*(a)}\big)\Big) = \frac{e_n^{-1}}{(z-a)^2}\cdot\big(r_{1,n}(z)\cdot\phi_n(z)+t_{1,n}(z)\cdot\phi_n^*(z)\big),$$

wobei

$$r_{1,n}(z) = \big(a\cdot\overline{\phi_n'(a)}-a^2\cdot\overline{\phi_n(a)}\big)\cdot z - a^2\cdot\overline{\phi_n'(a)}$$

$$t_{1,n}(z) = \big(a^2\cdot\overline{\phi_n^*(a)}-a\cdot\overline{\phi_n^{*\prime}(a)}\big)\cdot z + a^2\cdot\overline{\phi_n^{*\prime}(a)}$$

Nun setzen wir dieses Ergebnis in die Gleichung aus Theorem 2.1 ein und verwenden, dass $\overline{\phi_n^*(a)} = (\overline{a})^n\cdot\phi_n(a)$ und $\phi_n^{*\prime}(a) = n\cdot\overline{a}\cdot\big(\phi_n^*(a)-a^{n-1}\cdot\frac{\overline{\phi_n'(a)}}{n}\big)$ (siehe Literatur [8]):

$$(z-a)^2\cdot\psi_n(z) = (z-a)^2\cdot\phi_n(z) - \frac{\phi_n'(a)}{\lambda+K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(e_n^{-1}\cdot\big(r_{1,n}(z)\cdot\phi_n(z)+t_{1,n}(z)\cdot\phi_n^*(z)\big)\Big)$$

$$= \phi_n(z)\cdot\Big((z-a)^2 + \frac{a\cdot\phi_n'(a)\cdot e_n^{-1}}{\lambda+K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\big[\big(a\cdot\overline{\phi_n(a)}-\overline{\phi_n'(a)}\big)\cdot(z-a)+a^2\cdot\overline{\phi_n(a)}\big]\Big)$$

$$+\phi_n^*(z)\cdot\frac{\phi_n'(a)\cdot e_n^{-1}\cdot(\overline{a})^{n-3}}{\lambda+K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\underbrace{\big(-z\cdot\overline{a}\cdot\phi_n(a)+z\cdot n\cdot\overline{a}\cdot\phi_n(a)-z\cdot\phi_n'(a)-n\cdot\phi_n(a)+a\cdot\phi_n'(a)\big)}_{\big((n-1)\cdot\overline{a}\cdot\phi_n(a)-\phi_n'(a)\big)\cdot(z-a)-\phi_n(a)}$$

□

2.3 Theorem

Seien die linearen Fuktionen $u_1=(z-a)\cdot(\frac{1}{z}-\overline{a})\cdot u$ und $u_2=(z-a)^2\cdot(\frac{1}{z}-\overline{a})^2\cdot u$ regulär und $\{\phi_n^{1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{\phi_n^{2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörigen MOPS. Dann gilt:

1.
$$(z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) = \phi_n(z) - \frac{\phi_n(a)}{K_{n-1}(a,a)}\cdot K_{n-1}(z,a)$$

2.
$$\phi_{n-1}^{1)}(a) = \phi_n'(a) - \frac{\phi_n(a)}{K_{n-1}(a,a)}\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)$$

3.
$$K_{n-2}^{1)}(z,a) = \frac{1}{K_{n-1}(a,a)}\cdot\frac{\begin{vmatrix}K_{n-1}^{(0,1)}(z,a) & K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)\\ K_{n-1}(z,a) & K_{n-1}(a,a)\end{vmatrix}}{(z-a)}$$

4.
$$K_{n-2}^{1)}(a,a) = \frac{1}{K_{n-1}(a,a)}\cdot\begin{vmatrix}K_{n-1}^{(1,1)}(a,a) & K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)\\ K_{n-1}^{(1,0)}(a,a) & K_{n-1}(a,a)\end{vmatrix}$$

wobei

$$K_{n-1}^{1)}(z,y) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\phi_j^{1)}(z)\cdot\overline{\phi_j^{1)}(y)}}{e_j^{1)}}\quad\text{und}\quad e_j^{1)} = u_1\big(\phi_j^{1)}(z)\cdot\overline{\phi_j^{1)}}(\frac{1}{z})\big)$$

Beweis: siehe Literatur [2],[3]

Schritte zum Lemma 2.4

Wir wenden Theorem 2.3 an und verwenden, dass im regulären Fall $\phi_n(a)\neq 0\ \forall\, n$:

$$(z-a)^2\phi_{n-2}^{2)}(z) =^{(1.)} (z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) - \frac{\phi_{n-1}^{1)}(a)}{K_{n-2}^{1)}(a,a)}\cdot(z-a)\cdot K_{n-2}^{1)}(z,a)$$

$$=^{(3.)} (z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) - \frac{\phi_{n-1}^{1)}(a)}{K_{n-2}^{1)}(a,a)}\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z,a) + \frac{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)\cdot K_{n-1}(z,a)\cdot\phi_n(a)}{K_{n-2}^{1)}(a,a)\cdot\phi_n(a)\cdot K_{n-1}(a,a)}$$

$$=^{(1.)} (z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) - \frac{\phi_{n-1}^{1)}(a)}{K_{n-2}^{1)}(a,a)}\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z,a) + \frac{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{K_{n-2}^{1)}(a,a)\cdot\phi_n(a)}\cdot\Big(\phi_n(z)-(z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z)\Big)$$

Es folgt die Gleichung $\oplus$:

$$K_{n-1}^{(0,1)}(z,a) = \frac{K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{\phi_n(a)} \cdot \Big[\phi_n(z) + \Big(\frac{K_{n-2}^{1)}(a,a)\cdot\phi_n(a)}{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)} - 1\Big)\cdot(z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z)$$

$$-\frac{K_{n-2}^{1)}(a,a)\cdot\phi_n(a)}{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}\cdot(z-a)^2\cdot\phi_{n-2}^{2)}(z)\Big]$$

2.4 Lemma

$$\psi_n(z) = \mathcal{A}_n\cdot\phi_n(z) + \mathcal{B}_n\cdot(z-a)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + \mathcal{C}_n\cdot(z-a)^2\cdot\phi_{n-2}^{2)}(z),$$

wobei

$$\mathcal{A}_n = 1 - \frac{\phi_n'(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{\phi_n(a)\cdot\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)} = 1-\alpha_n$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{\phi_n'(a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(a,a)}{\phi_n(a)\cdot\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)} - \frac{\phi_n'(a)\cdot K_{n-2}^{1)}(a,a)}{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)} = \alpha_n - \beta_n$$

$$\mathcal{C}_n = \frac{\phi_n'(a)\cdot K_{n-2}^{1)}(a,a)}{\phi_{n-1}^{1)}(a)\cdot\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)} = \beta_n$$

Beweis:

Indem man $\oplus$ in die Gleichung von Theorem 2.1 einsetzt, erhält man die Behauptung. □

2.5 Lemma

$$\varphi_{u_1}\big(\psi_n(z), z\cdot P(z)\big) = 0 \qquad \forall\, P\in\mathbb{P}_{n-3}$$

Beweis:

Sei $P\in\mathbb{P}_{n-3}$. Dann gilt:

$$\varphi_{u_1}\big(\psi_n(z), z\cdot P(z)\big) = u_1\Big(\psi_n(z)\cdot\frac{1}{z}\cdot\overline{P}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = u\Big((1-\frac{a}{z})\cdot(\frac{1}{z}-\overline{a})\cdot\psi_n(z)\cdot\overline{P}\big(\frac{1}{z}\big)\Big)$$

$$= a\cdot u\Big(\psi_n(z)\cdot(\overline{a}-\frac{1}{z})\cdot(\frac{1}{z}-\overline{a})\cdot\overline{P}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = -a\cdot u\Big(\psi_n(z)\cdot(\frac{1}{z}-\overline{a})^2\cdot\overline{P}\big(\frac{1}{z}\big)\Big)$$

$$= -a\cdot\varphi_u\big(\psi_n(z),(z-a)^2\cdot P(z)\big) = -a\cdot <\psi_n(z),(z-a)^2\cdot P(z)> = 0$$

□

2.6 Theorem

$$\psi_n(z) = \phi_n^{1)}(z) + M_n\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + N_n\cdot\phi_{n-2}^{1)\,*}(z),$$

wobei

$$M_n = \frac{\phi_{n+1}(a)\cdot\overline{\phi_n(a)}}{e_n\cdot K_n(a,a)} - \frac{\phi_n'(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)}}{\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)\cdot e_{n-1}} - a - \phi_{n+1}(0)\cdot\overline{\phi_n(0)}$$

$$e_{n-1}\cdot\overline{\phi_{n-2}(0)}\cdot N_n = \overline{\phi_{n-1}(a)}\cdot\Big(\frac{\phi_{n+1}(a)}{K_n(a,a)} + \frac{M_n\cdot\phi_n(a)}{K_{n-1}(a,a)}\Big) - \phi_{n+1}(0)\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)}\cdot e_n$$

$$+\frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(a\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)} - \overline{\phi_{n-1}'(a)}\cdot\phi_n(0)\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)} - \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}\cdot\overline{\phi_{n-2}'(a)}\Big)$$

Beweis:
Es gilt:
$\mathbb{P}_n = L[\phi_n^{1)}(z)]\oplus\mathbb{P}_{n-1} = L[\phi_n^{1)}(z),\phi_{n-1}^{1)}(z)]\oplus\mathbb{P}_{n-2} = L[\phi_n^{1)}(z),\phi_{n-1}^{1)}(z)]\oplus L[\phi_{n-2}^{1)\,*}(z)]\oplus z\cdot P_{n-3}$
Mit Lemma 2.4 folgt die Existenz der Darstellung. Wir berechnen nun M_n und N_n.
Multipliziere dazu die Gleichung aus der Behauptung mit $z-a$ und wende Theorem 2.3.1 an:

$$(z-a)\cdot\psi_n(z) = \phi_{n+1}(z) - \frac{\phi_{n+1}(a)}{K_n(a,a)}\cdot K_n(z,a) + M_n\cdot\Big(\phi_n(z) - \frac{\phi_n(a)}{K_{n-1}(a,a)}\cdot K_{n-1}(z,a)\Big)$$

$$+N_n\cdot(z-a)\cdot\phi_{n-2}^*(z)$$

Wendet man u an, so folgt:

$$u\Big((z-a)\cdot\psi_n(z)\cdot\overline{\phi_n}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{-\phi_{n+1}(a)\cdot\overline{\phi_n(a)}}{K_n(a,a)} + M_n\cdot e_n$$

Aus Theorem 2.1 gilt:

$$(z-a)\cdot\phi_n(z) = \phi_{n+1}(z) - \phi_{n+1}(0)\cdot\phi_n^*(z) - a\cdot\phi_n(z) - \frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(\frac{\overline{\phi_{n-1}'(a)}}{e_{n-1}}\cdot z^n + ...\Big)$$

Es folgt:

$$-\phi_{n+1}(0)\cdot\overline{\phi_n(0)}\cdot e_n - a\cdot e_n - \frac{\phi_n'(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)}\cdot e_n}{\big(\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)\big)\cdot e_{n-1}} = -\frac{\phi_{n+1}(a)\cdot\overline{\phi_n(a)}}{K_n(a,a)} + M_n\cdot e_n$$

Hieraus ergibt sich sofort M_n. Multipliziert man die Gleichung aus der Behauptung mit $(z-a)\cdot\overline{\phi_{n-1}}(\frac{1}{z})$ und wendet u an, so ergibt sich:

$$u\Big((z-a)\cdot\psi_{n-1}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{-\phi_{n+1}(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}(a)}}{K_n(a,a)} - \frac{M_n\cdot\phi_n(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}(a)}}{K_{n-1}(a,a)} + N_n\cdot e_{n-1}\cdot\overline{\phi_{n-2}(0)}$$

Man wende die Gleichung aus Theorem 2.1 und die Rekurrenzrelation (siehe Literatur [5], Seite 11) auf die linke Seite an:

$$u\Big((z-a)\cdot\psi_n(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = -\phi_{n+1}(0)\cdot e_n\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)}$$

$$-\frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \cdot u\Big((z-a)\cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z,a)\cdot \overline{\phi_{n-1}}(\frac{1}{z})\Big)$$

$$= -\phi_{n+1}(0)\cdot e_n \cdot \overline{\phi_{n-1}(0)} + \frac{a\cdot\phi_n'(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)}}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} - \frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot$$

$$\cdot u\Big(z\cdot\overline{\phi_{n-1}}(\frac{1}{z})\cdot\big(\frac{\phi_{n-1}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)}}{e_{n-1}} + \frac{\phi_{n-2}(z)\cdot\overline{\phi_{n-2}'(a)}}{e_{n-2}}\big)\Big)$$

wobei

$$u\Big(z\cdot\overline{\phi_{n-1}}(\frac{1}{z})\cdot\big(\frac{\phi_{n-1}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)}}{e_{n-1}} + \frac{\phi_{n-2}(z)\cdot\overline{\phi_{n-2}'(a)}}{e_{n-2}}\big)\Big)$$

$$= -\phi_n(0)\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)\cdot\phi_{n-1}'(a)} + \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}\cdot\overline{\phi_{n-2}'(a)}$$

Also:

$$-\frac{\phi_{n+1}(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}(a)}}{K_n(a,a)} - \frac{M_n\cdot\phi_n(a)\cdot\overline{\phi_{n-1}(a)}}{K_{n-1}(a,a)} + N_n\cdot e_{n-1}\cdot\overline{\phi_{n-2}(0)}$$

$$= -\phi_{n+1}(0)\cdot e_n\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)} + \frac{\phi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}\cdot\Big(a\cdot\overline{\phi_{n-1}'(a)} + \phi_n(0)\cdot\overline{\phi_{n-1}(0)\cdot\phi_{n-1}'(a)} - \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}\cdot\overline{\phi_{n-2}'(a)}\Big)$$

Falls $\phi_{n-2}(0) \neq 0$, so lässt scih N_n aus der oberen Gleichung errechnen. Falls $\phi_{n-2}(0) = 0$, so gilt $\phi_{n-2}(z) = z\cdot\phi_{n-3}(z)$ und somit können wir die Gleichung aus der Behauptung mit $(z-a)\cdot\overline{\phi_{n-2}}(\frac{1}{z})$ multiplizieren und iterativ vorgehen. □

Mit Hilfe der Rekurrenzrelation von Szegö (siehe Literatur [5],[6])

$$\phi_{n-1}^{1)\,*}(z) = \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}\cdot\phi_{n-2}^{1)\,*}(z) + \overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z)$$

erhalten wir aus Theorem 2.5:

2.7 Theorem

$$\psi_n(z) = S_{1,n}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + S_{0,n}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)\,*}(z)$$

wobei

$$S_{1,n}(z) = z + M_n - N_n\cdot\frac{e_{n-2}^{1)}}{e_{n-1}^{1)}}\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}$$

$$S_{(0,n)}(z) = \phi_n^{1)}(0) + N_n\cdot\frac{e_{n-2}^{1)}}{e_{n-1}^{1)}}$$

Beweis:

$$\psi_n(z) = \phi_n^{1)}(z) + M_n\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + N_n\cdot\frac{e_{n-2}^{1)}}{e_{n-1}^{1)}}\cdot\Big(\phi_{n-1}^{1)\,*}(z) - \overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z)\Big)$$

$$= \Big(z + M_n - N_n\cdot\frac{e_{n-2}^{1)}}{e_{n-1}^{1)}}\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\Big)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + \Big(\phi_n^{1)}(0) + N_n\cdot\frac{e_{n-2}^{1)}}{e_{n-1}^{1)}}\Big)\cdot\phi_{n-1}^{1)\,*}(z)$$

□

2.8 Theorem (3-Term-Rekursion)

Die Folge $\{\psi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die folgende 3-Term-Rekursion:

$$W(z,2)\cdot\psi_{n+1}(z) + Y(z,3)\cdot\psi_n(z) + Z(z,4)\cdot\psi_{n-1}(z) = 0$$

wobei $W(z,2)\in\mathbb{P}_2,\ Y(z,3)\in\mathbb{P}_3,\ Z(z,4)\in\mathbb{P}_4$

Beweis:
Wir betrachten folgendes System:

$$\psi_{n-1}(z) = S_{1,n-1}(z)\cdot\phi_{n-2}^{1)}(z) + S_{0,n-1}(z)\cdot\phi_{n-2}^{1)\,*}(z)$$

$$\psi_n = \Big(S_{1,n}(z) + S_{0,n}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\Big)\cdot z\cdot\phi_{n-2}^{1)}(z) + \Big(S_{1,n}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0) + S_{0,n}(z)\Big)\cdot\phi_{n-2}^{1)\,*}(z)$$

$$\psi_{n+1} = \Big(S_{1,n+1}(z) + S_{0,n+1}(z)\cdot\overline{\phi_n^{1)}(0)}\Big)\cdot z\cdot\phi_{n-1}^{1)}(z) + \Big(S_{1,n+1}(z)\cdot\phi_n^{1)}(0) + S_{0,n+1}(z)\Big)\cdot\phi_{n-1}^{1)\,*}(z)$$

$$= \Big(\big(S_{1,n+1}(z) + S_{0,n+1}(z)\cdot\overline{\phi_n^{1)}(0)}\big)\cdot z^2 + \big(S_{1,n+1}(z)\cdot\phi_n^{1)}(0) + S_{0,n+1}(z)\big)\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot z\Big)\cdot\phi_{n-2}^{1)}(z)$$

$$+\Big(\big(S_{1,n+1}(z) + S_{0,n+1}(z)\cdot\overline{\phi_n^{1)}(0)}\big)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0)\cdot z + \big(S_{1,n+1}(z)\cdot\phi_n^{1)}(0) + S_{0,n+1}(z)\big)\Big)\cdot\phi_{n-2}^{1)\,*}(z)$$

Mit den Bezeichungen

$$T_{1,n}(z) = S_{1,n}(z) + S_{0,n}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)},\quad \delta T_{1,n}(z) = 1,$$

$$V_{1,n}(z) = S_{1,n}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0) + S_{0,n}(z),\quad \delta V_{1,n}(z) \le 1,$$

folgt:

$$\begin{vmatrix} \psi_{n-1}(z) & S_{1,n-1}(z) & S_{0,n-1}(z) \\ \psi_n(z) & T_{1,n}(z)\cdot z & V_{1,n}(z) \\ \psi_{n+1}(z) & T_{1,n+1}(z)\cdot z^2 + V_{1,n+1}\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot z & T_{1,n+1}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0)\cdot z + V_{1,n+1}(z) \end{vmatrix} = 0$$

und somit:

$$0 = \psi_{n+1}(z)\cdot\big(S_{1,n-1}(z)\cdot V_{1,n}(z) - T_{1,n}(z)\cdot S_{0,n-1}(z)\cdot z\big) - \psi_n(z)\cdot\big(S_{1,n-1}(z)\cdot T_{1,n+1}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0)\cdot z$$

$$+ S_{1,n-1}(z)\cdot V_{1,n+1}(z) - S_{0,n-1}(z)\cdot T_{1,n+1}(z)\cdot z^2 - S_{0,n-1}(z)\cdot V_{1,n+1}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot z\big)$$

$$+\psi_{n-1}(z)\cdot\big(T_{1,n}(z)\cdot T_{1,n+1}(z)\cdot\phi_{n-1}^{1)}(0)\cdot z^2 + T_{1,n}(z)\cdot V_{1,n+1}(z)\cdot z$$

$$- V_{1,n}(z)\cdot T_{1,n+1}(z)\cdot z^2 - V_{1,n}(z)\cdot V_{1,n+1}(z)\cdot\overline{\phi_{n-1}^{1)}(0)}\cdot z\big)$$

□

Die folgenden zwei Abschnitte werden ohne Beweise aufgeführt.

3 Der positiv definite Fall

Sei nun u positiv definit. Dann gilt nach Theorem 2.1:

$$<,> \text{ positiv definit } \Leftrightarrow \frac{\lambda + K_n^{(1,1)}(a,a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} > 0 \;\forall\, n \geq 1$$

Die von dem normalisierten Lebesgue-Mass induzierte Funktion $u(z^n) = \delta_{n0}\ \forall n \in \mathbb{Z}$ erfüllt diese Eigenschaft. Mit Theorem 2.1 gilt für die neuen orthogonalen Polynome:

$$\psi_n(z) = z^n - \frac{n \cdot a^n \cdot \sum_{j=1}^{n-1}(j \cdot z^j \cdot \overline{a}^j)}{\lambda + \sum_{j=1}^{n-1} j^2} = z^n - \frac{6 \cdot n \cdot a^n \cdot \sum_{j=1}^{n-1}(j \cdot z^n \cdot \overline{a}^j}{6 \cdot \lambda + (n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}$$

$$= z^n - \frac{6 \cdot n}{e \cdot \lambda + (n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j) \cdot z^{n-j}}{\overline{a}^j}$$

Seien im Folgenden $E_n =< \psi_n(z), \psi_n(z) >$ und $\{\varphi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{\Psi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ die OPS[2] bezüglich u bzw. $<,>$.

3.1 Theorem

1. $\Phi_n(z) = \left(\frac{e_n}{E_n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\varphi(z) - \frac{\varphi_n'(a)}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} \cdot K_{n-1}^{(0,1)}(z,a)\right);$

   wobei $\varphi_n(z) = \left(\frac{1}{e_n}\right)^1 2 \cdot z^n + ...$ und $\Psi_n(z) = \left(\frac{1}{E_n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot z^n + ...$
2. $\Phi_n(z) = \left(\frac{E_n}{e_n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\varphi_n(z) - \frac{\varphi_n'(a)}{\lambda + K_n^{(1,1)}(a,a)} \cdot K_n^{(0,1)}(z,a)\right)$
3. $\frac{e_n}{E_n} = 1 - \frac{|\varphi_n'(a)|^2}{\lambda + K_n^{(1,1)}(a,a)}$
4. $E_n - e_n = \frac{E_n \cdot |\varphi_n'(a)|^2}{\lambda + K_n^{(1,1)}(a,a)} = \frac{e_n \cdot |\varphi_n'(a)|^2}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}$
5. $|\Psi_n'(a)|^2 = \frac{\lambda^2 \cdot (1 - \frac{e_n}{E_n})}{\lambda + K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)}$

[2]orthogonal polynomial sequence: System orthogonaler Polynome

4 Asymptotische Eigenschaften orthonormaler Polynome

Ist u positiv definit, so existiert ein endliches, positives Borelmass μ auf dem Einheitskreis T, so dass gilt: (siehe Literatur [4])

$$u\Big(P(z) \cdot \overline{Q}\big(\frac{1}{z}\big)\Big) = \int_T P(z) \cdot \overline{Q(z)} \mathrm{d}\mu$$

Sei $\mathrm{d}v(z) = |z-a|^2 \mathrm{d}\mu$, $\{\varphi_n(z;v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ das OPS[2] bezüglich v und $\{K_n(z,y;v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ das korrespondierende System der Kerne. Es gilt: (siehe Literatur [3])

1. $$(z-a) \cdot \varphi_{n-1}(z;v) = \left(\frac{K_{n-1}(a,a)}{K_n(a,a)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\varphi_n(z) - \frac{\varphi_n(a)}{K_{n-1}(a,a)} \cdot K_{n-1}(z,a)\right),$$

   wobei $\left(\frac{K_{n-1}(a,a)}{K_n(a,a)}\right)^{\frac{1}{2}}$ auch als $\left(1 + \frac{|\varphi_n(a)|^2}{K_{n-1}(a,a)}\right)^{-\frac{1}{2}}$ geschrieben werden kann.
2. $$(z-a) \cdot \overline{(y-a)} \cdot K_{n-1}(z,y;v) = K_n(z,y) - \overline{K_n(y,a)} \cdot \big(K_n(a,a)\big)^{-1} \cdot K_n(z-a)$$

4.1 Theorem

Gelte für das Mass μ $\{\phi_n(0)\} \to 0$. Dann folgt: $\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi_n'(a)|^2}{K_{n-1}^{(1,1)}(a,a)} = 0$

4.2 Korollar

Gelte für das Mass μ $\{\phi_n(0)\} \to 0$ und sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{E_n} = 1$
2. $\lim_{n\to\infty} \Psi_n'(a) \cdot \overline{\varphi_n'(a)} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \Psi_n'(a) = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} (E_n - e_n) = 0$

4.3 Theorem

Gelte für das Mass μ $\{\phi_n(0)\} \to 0$ und sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = 1 \quad \text{gleichmäßig für } |z| > r > 1$$